On existence of invariant Einstein metrics on a compact homogeneous space

Michail M. Graev

Abstract. We prove that the existence of a positively defined, invariant Einstein metric m on a connected homogeneous space G/H of a compact Lie group G is the consequence of non-contractibility of some compact set $C = X^{\Sigma}_{G,H}$ (Böhm polyhedron) introduced by C.Böhm. There is a natural continuous map of C onto the flag complex K_B of a finite graph B. The special case of $C = K_B$, K_B non-contractible, is one of Böhm existence criteria, and the case of the graph B non-connected is a improved version of the Graph Theorem (C.Böhm, M.Wang, and W.Ziller) actual for any $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Moreover, preparation theorems of C. Böhm on retractions are revisited and new constructions of some topologic spaces are suggested.

Аннотация. Доказано, что существование положительно определенной инвариантной метрики Эйнштейна m на связном однородном пространстве G/H компактной группы Ли G следует из нестягиваемости введенного К.Бемом [Bo] триангулируемого компакта $C = C(G, H)$. Бем сопоставил каждому G/H компакты C и D ($X^{\Sigma}_{G,H}$ и $\Delta^{T}_{G/H}$ в его обозначениях). Существуют непрерывные отображения C и D на флаговые комплексы K_B и K_{Γ} конечных графов B и Γ соответственно. Согласно [Bo], $D = K_{\Gamma}$ и нестягиваемость D влечет существование m. Аналогичная теорема для C доказана там при условии, эквивалентном $C = K_B$, от которого мы освобождаемся. Теперь несвязность графа B приводит к существованию m, а это позволяет пересмотреть уже другой критерий, известный как теорема о графе [BWZ]. Именно, B является подграфом той части Υ графа Вана–Циллера, несвязность которой, согласно [BWZ], влечет существование m, но вместе с тем и полупростоту группы G. Построена серия примеров, где симплициальный комплекс D стягиваем, граф Υ связен, $C \neq K_B$ и граф B несвязен. Таким образом, усилен критерий существования Бема, а теорема о графе перенесена (с изменением) на случай $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Кроме того, пересмотрены две подготовительные теоремы о ретракциях из [Bo] и в связи с этим предложены новые конструкции некоторых топологических пространств.

Ключевые слова и фразы. Однородная метрика Эйнштейна, Homogeneous Einstein metric.

Поддержано РФФИ, грант 10-01-00041а.

Содержание

Содержание

§ 1. Введение. Критерий существования Бема и обобщение

Данная статья посвящена критерию существования инвариантных метрик Эйнштейна $g : \mathrm{ric}(g) = \lambda g$ на компактном однородном многообразии.

Далее рассматривается связное n-мерное однородное пространство G/H компактной группы Ли G. Через $\mathcal{M}_1^G$ обозначается (диффеоморфное $\mathbb{R}^N$, $N < \frac{n(n+1)}{2}$) полное риманово многообразие всех G-инвариантных римановых метрик объема 1 на G/H. Напомним, что метрики Эйнштейна, принадлежащие $\mathcal{M}_1^G$, совпадают с критическими точками гладкой функции $g \in \mathcal{M}_1^G \mapsto \mathrm{sc}(g) \in \mathbb{R}$ (скалярная кривизна метрики g). Кроме того, если G/H отлично от тора, все критические значения $\mathrm{sc}(g)$ строго положительны. (См. также § 2.)

Несколько лет тому назад К.Бем доказал, что существование инвариантных положительно определенных эйнштейновых метрик на компактном связном однородном пространстве G/H следует из нестягиваемости построенного им компактного полиэдра.

Во введении мы явно опишем полиэдр Бема, сформулируем критерий Бема и его обобщение. Для этого нам понадобятся следующие определения. Фиксируем на группе G биинвариантную риманову метрику Q и обозначим снова через Q ее проекцию на G/H. Нормируем Q так, что $Q \in \mathcal{M}_1^G$. Обозначим через $\mathcal{S}$ топологическое пространство геодезических лучей на $\mathcal{M}_1^G$, выходящих из точки Q; оно естественно отождествляется с единичной сферой Σ в $T_Q\mathcal{M}_1^G$, но мы будем пользоваться и другими моделями. Пусть $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}$ — подмножество лучей, пересекающих уровни $\mathrm{sc}(g) \geqslant k$.

Бем построил компактное подпространство $X_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ со следующими свойствами:

a) каждая окрестность подпространства X_ε содержит $\mathcal{S}_k$ для $k \ggg 0$;
b) X_ε является окрестностным ретрактом сферы $\mathcal{S}$;
c) X_ε стягивается по себе на явно описанный ниже полиэдр $\|\mathcal{K}\|$.

Полиэдр $\|\mathcal{K}\| \subset X_\varepsilon$ удовлетворяет следующему условию: d) для каждого числа $t \geqslant 0$ и каждого луча $r \in \|\mathcal{K}\|$ выполняется неравенство $\mathrm{sc}(r(t)) > c\, e^{t/n} > 0$, где c — не зависящая от r и t постоянная, а $t \mapsto r(t)$ — натуральная параметризация.

Критерий Бема можно вывести из (a)–(d) и вариационной теоремы, полученной в [BWZ], с помощью некоторого рассуждения: см. [Bo] и ниже, § 2.

Сверх того, Бем доказал такую теорему: e) пересечения уровней $\mathrm{sc}(g) > 2\,\mathrm{sc}(Q)$ каждой достаточно далекой сферой $\{r(t) : r \in \mathcal{S}\}$, $t \ggg 0$, отождествляемой с $\mathcal{S}$, заключены в наперед заданной окрестности X_ε. Очевидно, эта теорема влечет a)

Отметим, что третье свойство X_ε было доказано в [Bo] лишь при дополнительных ограничениях [1)] на однородное пространство G/H.

В этой статье мы освободимся от всех ограничений на G/H, но для этого нам придется пожертвовать естественной триангуляцией Бема на $\|\mathcal{K}\|$, которой в общем случае не существует, и рассматривать $\|\mathcal{K}\|$ просто как триангулируемый компакт. Кроме того, будет предложена новая, более простая, конструкция пространства X_ε со свойствами (a)–(c) и (e).

В рассмотренном Бемом случае полиэдр $\|\mathcal{K}\|$ удобно ввести алгебраически, т.е. как симплициальную схему; ее вершинами служат подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из некоторого конечного набора $\mathcal{K}$, а симплексами — всевозможные флаги φ подалгебр из этого набора.

Чтобы получить геометрическую реализацию комплекса $\Delta(\mathcal{K})$ флагов φ, мы сначала введем на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ $Ad(G)$-инвариантную евклидову метрику и сопоставим каждой подалгебре $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}$ ортопроектор $\chi^{\mathfrak{k}} = 1_{\mathfrak{g}} - 1_{\mathfrak{k}}$. Теперь каждому флагу $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$ можно сопоставить прямолинейный симплекс $\|\varphi\|$ — выпуклую оболочку всех $\chi^{\mathfrak{f}}$, $\mathfrak{f} \in \varphi$. Обозначим через $\|\mathcal{K}\|$ объединение симплексов $\|\varphi\|$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$. Точки $A \in \|\mathcal{K}\|$ являются симметрическими операторами с неотрицательным спектром на $\mathfrak{g}$ и лежат на гиперповерхности операторов с наибольшим собственным значением один [2)].

В качестве кандидатов Бем рассматривал следующие семейства подалгебр $\mathcal{K}$:

[1)] Более подробно, К.Бем ввел вспомогательное 'пространство неторальных направлений' X^{Σ}_{nt} и доказал существование строгих деформационных ретракций $X_\varepsilon \xrightarrow{1} X^{\Sigma}_{nt} \xrightarrow{2} \|\mathcal{K}\|$. Для 2 он использовал специальную триангуляцию τ на полиэдре $\|\mathcal{K}\|$ (в основном случае обозначенном через $X^{\Sigma}_{G/H}$ и названном 'нервом' [Bo, §1]), и предположил, если я правильно понял, что без τ можно обойтись.

[2)] Эта гиперповерхность вписана в евклидову сферу $\{A : d(A, \frac{1}{2}1_{\mathfrak{g}}) = \frac{1}{2}\sqrt{\dim \mathfrak{g}}\}$, на которой лежат вершины комплекса, и можно говорить о стереографической проекции на гиперплоскость из полюса 0. Ниже в основном тексте статьи используется вторая прямолинейная модель, полученная из первой модели аналогичной стереографической проекцией. В ней каждый евклидов треугольник $\mathfrak{k}_1 > \mathfrak{k}_2 > \mathfrak{k}_3$, $\mathfrak{k}_i \in \mathcal{K}$ имеет прямой угол в вершине $\mathfrak{k}_2$. Бем пользуется третьей, сферической, моделью комплекса, где каждое ребро строго меньше четверти большого круга, на котором лежит, и каждый эйлеров треугольник $\mathfrak{k}_1 > \mathfrak{k}_2 > \mathfrak{k}_3$ снова имеет прямой угол в вершине $\mathfrak{k}_2$.

- **1):** все $Ad(H)$-инвариантные подалгебры $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$, собственные и собственным образом содержащие $\mathfrak{h}$, такие, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \not\subset \mathfrak{h}$ (неторальные H-подалгебры в его терминологии);
- **2):** подалгебры, натянутые на конечные суммы *минимальных* подалгебр $\mathfrak{k}$, удовлетворяющих условию 1);
- **3) и 4):** определяются так же, как 1) и 2) соответственно, но условие $Ad(H)$-инвариантности дополняется инвариантностью относительно присоединенного действия максимального тора T группы $\mathrm{Norm}_{G^0}(H^0)$.

Аналогично можно рассматривать другие семейства, в частности,

- **1*):** подалгебры $\mathfrak{l}$ вида 1), удовлетворяющие условию $\mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{h}$, которые будем называть почти полупростыми.

Отметим, что подалгебра, натянутая на каждую пару почти полупростых подалгебр 1*), почти полупроста или $= \mathfrak{g}$, каждая подалгебра 1) содержит почти полупростую подалгебру и каждая подалгебра 2) почти полупроста. В силу [BWZ, Prop. 4.2] семейство 1*) состоит из конечного числа орбит связной компоненты единицы компактной группы $\mathrm{Norm}_G(H)$.

Бем доказал конечность набора 4). Семейства подалгебр 1) — 3) могут оказаться и конечными (в частности, пустыми), и континуальными.

Критерий Бема (см. [Bo]). *Пусть $\mathcal{K}$ — один из наборов* 1) — 4) *или* 1*). *Предположим, что $\mathcal{K}$ конечен, а соответствующая симплициальная схема $\Delta(\mathcal{K})$ нестягиваема (например, пуста). Тогда на G/H существует положительно определенная метрика Эйнштейна, инвариантная относительно действия группы G и, в случаях* 3) *и* 4), *— также относительно правого действия тора T.*

Родственный критерий был получен в работе К.Бема–М.Вана–В.Циллера [BWZ]. Согласно [BWZ], существование таких метрик Эйнштейна следует из несвязности некоторого компактного топологического пространства $Y_{WZ} \subset \mathcal{S}$, которая, в свою очередь, следует из несвязности некоторого конечного графа Υ_{WZ} («теорема о графе»[3)]).

В доказательстве критерия в [Bo] вместо Y_{WZ} используется меньшее топологическое пространство X_ε, которое, как показано там, стягивается по себе на компактный полиэдр – конечный симплициальный комплекс Бема, и, окончательно, существование инвариантных эйнштейновых метрик на G/H следует из нестягиваемости этого симплициального

[3)] «Graph Theorem». 'This theorem can be viewed as another step towards a general understanding of the existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics, and was suggested by the last two authors 15 years ago.' [BWZ]

комплекса [4]. Заметим, что в случаях 3) и 4) многообразие метрик $\mathcal{M}_1^G$ заменяется вполне геодезическим подмногообразием T-инвариантных метрик $(\mathcal{M}_1^G)^T$ и в определение X_ε вносятся соответствующие изменения.

Одно только построение X_ε в [Bo, §5.6], еще до проверки свойств (a) и (c), включает индуктивное определение и несколько страниц подготовки. Оно представляется громоздким в сравнении с конструкцией пространства Y_{WZ} в [BWZ, §3]; последнее состоит из компонент линейной связности бóльшего пространства, описанного далее с незначительными отличиями от оригинала (см. замечание 4.3).

В этой статье предложена другая конструкция X_ε. Оно заключено между теми же самыми, что и в [Bo], замкнутыми полуалгебраическими подмножествами X_{nt}^Σ и W^Σ сферы $\mathcal{S} \simeq \Sigma$ (иногда $X_{nt}^\Sigma = X_\varepsilon = W^\Sigma$, например, при $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(H)$).

Поведение скалярной кривизны на бесконечности можно будет описывать прежними формулами Бема, где $\|\mathcal{K}\| \subset X_\varepsilon \subset W^\Sigma \subset \Sigma \simeq \mathcal{S}$:

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{sc}(r(t)) = \begin{cases} +\infty, & r \in \|\mathcal{K}\|, \\ \leqslant 0, & r \in W^\Sigma \setminus X_\varepsilon, \\ -\infty, & r \in \Sigma \setminus W^\Sigma. \end{cases}$$

В новой конструкции пространства X_ε используется также один компакт $\|\mathcal{T}\|$, роль которого не была замечена в [Bo]. Обозначим через $\mathcal{T}$ семейство *торальных* H-подалгебр $\mathfrak{k}$, которое определяется так же, как семейство 1) с заменой условия $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \not\subset \mathfrak{h}$ на $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h}$. Каждая торальная подалгебра расщепляется в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{h}$ и ненулевой абелевой подалгебры. Заметим, что множество $\mathcal{T}$, вообще говоря, континуально. По аналогии с $\|\mathcal{K}\|$ определим подмножество симметрических линейных операторов $\|\mathcal{T}\|$. Оно является компактным полуалгебраическим подмножеством евклидова пространства $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, имеющим с $\|\mathcal{K}\|$ пустое пересечение, $\|\mathcal{K}\| \cap \|\mathcal{T}\| = \varnothing$.

Следующие теоремы являются новыми.

Теорема A. *Существует компактное подпространство $X_\varepsilon \subset W^\Sigma$ со свойствами* (a), (b)*, вкладываемое в джойн $J = \|\mathcal{T}\| * X_{nt}^\Sigma$ так, что естественное стягивание дополнения $J \setminus \|\mathcal{T}\|$ на второй сомножитель индуцирует строгую деформационную ретракцию X_ε на X_{nt}^Σ.*

По построению, X_ε будет полуалгебраическим множеством (как и в [Bo]). Отсюда следует (b). В соответствии с [Bo, теорема 5.52, теорема

---

[4] Фактически эта теорема получена там в различных версиях с различными границами применимости. Одна из них применима к произвольному компактному однородному пространству G/H и G-инвариантным метрикам, инвариантным также относительно правого действия максимального тора группы $\operatorname{Norm}_{G^0}(H^0)$. При этом ограничении на метрики комплекс Бема конечен (он зависит от пространства метрик), а при его отбрасывании конечность комплекса становится ограничением на G/H. По поводу приложений см. также [Bo-Ke, GLP].

5.54], свойство (а) выполняется, если (*) $W^\Sigma \setminus X_\varepsilon$ покрыто двумя подмножествами, определенными в [Bo, следствие 5.49] формулами (5.50) и (5.51). Поэтому ниже вместо свойства (а) мы проверим это геометрическое условие [5)], которое запишем сразу в удобной для нас форме.

Теорема A следует из предложений 6.2 и 6.3, ниже (следствие 6.4).

Построенный X_ε или любой другой п.а. компакт, лежащий на W^Σ, стягиваемый по себе на X^Σ_{nt} и удовлетворяющий условию (*), назовем подходящим расширением пространства неторальных направлений X^Σ_{nt}, что не противоречит терминологии Бема.

Бем доказал, что X^Σ_{nt} стягивается по себе на $\|\mathcal{K}\|$, где $\mathcal{K}$ — семейство 1) или 2), в предположении, что $\mathcal{K}$ конечно. В данной статье аналогичное утверждение (применимое ко многим семействам) доказано для компактных $\mathcal{K}$ и $\|\mathcal{K}\|$.

Пусть для определенности $\mathcal{K}$ — семейство подалгебр вида 1), 1*) или 2). Предположим, что объединение $\|\mathcal{K}\|$ симплексов $\|\varphi\|$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$, является компактным подмножеством евклидова пространства $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. При этом выполняется:

Теорема B. *Пространство $\|\mathcal{K}\|$ с унаследованной из $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ топологией, если оно компактно, является строгим деформационным ретрактом пространств X_ε и $X_1 = X^\Sigma_{nt}$.*

Отметим, что в общем случае компактность $\|\mathcal{K}\|$ эквивалентна компактности $\mathcal{K} \simeq \{A \in \|\mathcal{K}\| : d(A, \frac{1}{2}1_\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}\sqrt{\dim\mathfrak{g}}\}$. (Здесь $d(u,v)$ — евклидово расстояние на $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.)

Теорема B следует из теоремы 6.6, ниже, с учетом сделанного замечания и теоремы существования A.

Можно доказать, что семейства $\mathcal{K}$ видов 1), 1*), 2) компактны, и к ним применима теорема B. Например, в случае 1*) компактность следует из конечности фактора $\mathcal{K}/\operatorname{Norm}_G(H)^0$. По той же причине семейство 2) состоит из связных компонент семейства 1*) и, следовательно, компактно. (При должном определении X_ε и X^Σ_{nt} теорема B допускает также обобщение на случаи семейства $\mathcal{K}$ вида 3), компактность которого легко следует из компактности 1), и многих других семейств подалгебр.)

В случае 2) имеется гомеоморфизм $\|\mathcal{K}\|$ на топологическое пространство $X^\Sigma_{G/H}$ из [Bo] (названное 'нервом'). Как ясно из определения, 'нерв' устроен достаточно хорошо. Бем называет его полуалгебраическим многообразием. В [Bo, §1] без доказательства утверждается, что 'нерв' компактен, а мы это уже обсудили. Тогда по теореме B верно имеющееся там предположение (доказанное в [Bo] только для конечного $\mathcal{K}$), что в общем случае $X^\Sigma_{G/H}$ является строгим деформационным ретрактом пространства X^Σ_{nt}.

[5)] К.Бем доказал, что при этом условии для каждой δ-окрестности U_δ компакта X_ε в $\mathcal{S}$ найдется число $t_0(\delta) > 0$ такое, что $\operatorname{sc}(r(t)) \leqslant 2\operatorname{sc}(Q)$ для всех $t > t_0(\delta)$ и всех $r \in \mathcal{S} \setminus U_\delta$.

Теперь и в критерии Бема, и в его доказательстве (см. [Bo, Th. 1.4, Th. 8.1]) можно заменить нестягиваемость конечной симплициальной схемы $\Delta(\mathcal{K})$ нестягиваемостью компакта $\|\mathcal{K}\| \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Это возможно в силу теорем A и B и не требует переработки этого доказательства (фактически основанного на свойствах (a)–(d)).

Таким образом, переходя от конечного $\mathcal{K}$ к компактному $\mathcal{K}$ и объединяя теоремы A и B с заключительным рассуждением Бема, получаем следующую теорему:

Теорема C. *Если $\|\mathcal{K}\| \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ — нестягиваемый компакт, на многообразии G/H существует инвариантная положительно определенная метрика Эйнштейна.*

Хорошо известно, что таких метрик вовсе не существует, если компактное однородное многообразие G/H отлично от тора и имеет бесконечную фундаментальную группу. В этом случае $\mathfrak{h} < [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, т.е. существует наибольшая подалгебра $\mathfrak{k}$ вида 1*), а тогда и наибольшая подалгебра $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{\max}$ вида 2). Из определения сразу следует, что $\|\mathcal{K}\| \simeq X^{\Sigma}_{G/H}$ стягивается по себе в точку $\chi^{\mathfrak{k}_{\max}}$ (точно как в доказательстве [Bo, Prop. 7.5]), и противоречия не возникает.

Ниже в § 2 мы построим серию однородных пространств G/H, на которых по теореме C существуют инвариантные метрики Эйнштейна, хотя ни критерий существования Бема, ни теорема о графе не позволяют утверждать ничего. Для этого мы выведем из теоремы C новую версию теоремы о графе.

Пусть $\mathcal{L}$ — семейство всех почти полупростых подалгебр вида 1*) и $\mathcal{L}^{\min} \subset \mathcal{L}$ — подсемейство подалгебр вида 2). Обозначим через $[\mathfrak{l}]$ орбиту каждой подалгебры $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ относительно $\mathrm{Norm}_G(H)^0$. Обозначим через B_{WZ} граф с вершинами $[\mathfrak{l}]$, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$, и ребрами $([\mathfrak{k}], [\mathfrak{l}])$, где $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$. Пусть $\mathrm{B}^{\min}_{WZ}$ — подграф этого графа, индуцированный на подмножестве вершин $[\mathfrak{k}]$, $\mathfrak{k} \in \mathcal{L}^{\min}$. Тогда

$$\mathrm{B}^{\min}_{WZ} \subset \mathrm{B}_{WZ} \subset \Upsilon_{WZ}.$$

Эти три графа конечны. Существуют непрерывные сюръективные отображения компактов $\|\mathcal{K}\| = \|\mathcal{L}\|$ и $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ на флаговые комплексы графов B_{WZ} и $\mathrm{B}^{\min}_{WZ}$ соответственно. Поэтому из теоремы C вытекает:

Следствие (вариант теоремы о графе). *Существование инвариантной эйнштейновой метрики на G/H следует из несвязности графа B_{WZ} или графа $\mathrm{B}^{\min}_{WZ}$.*

В силу теоремы C нестягиваемость $\|\mathcal{L}\|$ или $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ приводит к существованию инвариантных метрик Эйнштейна сразу на G/H и $\overline{G}/\overline{H}$, где $\overline{G} = G/Z$ — фактор G по какой-нибудь замкнутой связной коммутативной нормальной подгруппе, $\overline{H} = H/H \cap Z$. Пусть, например,

$$\overline{G}/\overline{H} = (G_1/H_1 \times \ldots \times G_p/H_p)/Z,$$

где G_1/H_1 — односвязное однородное пространство Эйнштейна с несвязными графами B_{WZ} и $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$, а каждый сомножитель G_i/H_i с $i>1$ представляет собой главное расслоение окружностей над неприводимым эрмитовым симметрическим пространством и имеет естественную геометрию Сасаки-Эйнштейна с полной группой изометрий G_i. Тогда на $\overline{G}/\overline{H}$ существует инвариантная метрика Эйнштейна (см. § 2).

Теоремы A, B и C не исчерпывают содержания данной статьи; кроме того, они формулированы для частных случаев. Первая из них проясняет работу [Bo], вторая, грубо говоря, утверждает справедливость одной из ее гипотез, а третья следует из двух первых и содержит некоторое обобщение критерия. Дополнительным результатом статьи является простая конструкция X_ε. Кроме того, в ней пересмотрены подготовительные теоремы Бема 5.48 и 6.10 о ретракциях подпространств топологического пространства W^Σ.

Получены также грубые "эскизные" версии этих теорем, в которых W^Σ и X_ε заменяются бóльшими пространствами. Для получения грубых версий заменяются шарами звездные полуалгебраические множества, возникающие в конструкциях Бема. Грубая эскизная версия W^Σ отличается от его грубой версии из [BWZ] (см. ниже, замечание 4.3), в частности, не зависит от параметров. Для доказательства критерия Бема и теоремы C достаточно использовать грубую эскизную версию X_ε (с нужными свойствами (a)–(c)).

Начиная с § 5 берутся за основу элементарные стягиваемые подпространства, названные там 'бабочками'. Пересечение бабочек снова является бабочкой; для пересечения найдена окончательная формула (5.2), основные частные случаи которой фактически были получены Бемом:

$\mathtt{B}[\varphi_1]\cap\mathtt{B}[\varphi_2]=\mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2]$, где $\mathtt{B}[\varphi]$ — бабочка, отнесенная каждому флагу подалгебр φ, а $(\varphi_1,\varphi_2)\mapsto\varphi=\varphi_1\varphi_2$ — коммутативное ассоциативное идемпотентное умножение флагов.

Например, бабочками, отнесенными флагам вида $\varphi=(\mathfrak{g}>\mathfrak{f}_1>\ldots>\mathfrak{f}_r)$ объявляются геометрические симплексы $\|\mathfrak{f}_1>\ldots>\mathfrak{f}_r\|$, и в случае пересечения таких симплексов $\varphi_1\varphi_2=\varphi_1\cap\varphi_2$. Понятие бабочки получено при анализе доказательства теоремы в [Bo, §6.2]. В грубой эскизной версии все бабочки гомеоморфны шарам.

В § 2 доказаны теорема C и следующие утверждения.

В § 3 вводится удобная для нас модель сферы $\mathcal{S}$. В § 4 даются основные определения. В § § 5–6, после формулы пересечения бабочек, доказаны теоремы о ретракциях. Каждая теорема одинаково формулируется для грубой и тонкой версий (версии различаются только определениями бабочек), и в формулировке используется верхняя полурешетка $\mathcal{K}$ подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая довольно общим условиям.

В §§ 6.2–6.3 теоремы о ретракциях применяются, в частности, к полурешеткам $\mathcal{K}$ видов 1)–4). Здесь дается окончательное определение пространства X_ε с оценкой параметра ε, и делается вывод, что оно удовлетворяет условиям [Bo, формулировки 5.48, 5.49], т.е. является подходящим расширением пространства неторальных направлений. Сделано добавление о компактности семейств торальных и неторальных H-подалгебр.

§ 2. Доказательство теоремы C. Вариант теоремы о графе

Этот раздел примыкает к введению и не используется в остальной части статьи. В нем доказаны теорема C и ее следствия, а также рассмотрены упоминавшиеся примеры однородных пространств Эйнштейна.

Сохраняются обозначения §1. В частности, $Q \in \mathcal{M}_1^G$ – нормальная риманова метрика на G/H, ассоциированная с $Ad(G)$-инвариантной евклидовой метрикой на $\mathfrak{g}$, Σ — единичная сфера в касательном пространстве к $\mathcal{M}_1^G$ и $\mathcal{S} \simeq \Sigma$ — пространство геодезических лучей на $\mathcal{M}_1^G$, выходящих из Q. Отметим, что $\mathrm{sc}(Q) > 0$, скалярная кривизна метрики Q положительна, если G/H отлично от тора. Всюду $n = \dim(G/H)$.

2.1. **Доказательство критерия.** Основная теорема [Bo] выведена там по существу из сформулированных во введении свойств (a)–(d). Теорему C можно получить точно так же.

По теоремам A и B свойствами (a)–(c) обладает компактное полуалгебраическое множество X_ε, которое будет построено позже (см. теорему 6.1 и далее, формулу (6.1)).

Напомним неравенство (d):

Лемма 2.1. *Обозначим через $\mathcal{K}$ определенное во введении семейство* 1) *всех неторальных H-подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и через $\|\mathcal{K}\|$ — соответствующий компакт, естественно вкладываемый в пространство $\mathcal{S}$ геодезических лучей, выходящих из Q. Тогда*

- d) *для каждого числа $t \geqslant 0$ и каждого луча $r \in \|\mathcal{K}\|$ выполняется неравенство $\mathrm{sc}(r(t)) > c\, e^{t/n} > 0$, где c — не зависящая от r и t постоянная, а $t \mapsto r(t)$ — натуральная параметризация.*

Лемма легко следует из другой оценки для скалярной кривизны в конце доказательства [Bo, Prop. 5.6]. См. замечание 2.5, ниже.

Теперь для доказательства теоремы C можно ограничиться односвязным случаем и перейти от конечного $\mathcal{K}$ к компактному $\mathcal{K}$ в финальном рассуждении Бема:

Теорема 2.2. *Пусть G/H – компактное связное односвязное изотропно приводимое однородное риманово пространство, $\mathcal{K}$ – семейство подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида* 1), 1*) *или* 2)*, и пусть $\|\mathcal{K}\|$ – соответствующий компакт. Если $\|\mathcal{K}\|$ нестягиваем, на G/H существует бесконечная последовательность $g_i \in \mathcal{M}_1^G$, $i = 1, 2, \ldots$ инвариантных*

римановых метрик объема 1 *со скалярными кривизнами* $\mathrm{sc}(g_i)$, *ограниченными сверху и снизу положительными постоянными, удовлетворяющая условию (Пале–Смейла)* $|\,\mathrm{ric}^0(g_i)|_{g_i} \to 0$. *Тогда* G/H *допускает инвариантную положительно определенную метрику Эйнштейна.*

Особые случаи $X_\varepsilon = \varnothing$ и $X_\varepsilon = \mathcal{S}$ не требуют отдельного доказательства, но мы их потом заново обсудим в следующем пункте. С них естественно начинается история теоремы 2.2 (в 1986 году их фактически рассматривали М.Ван и В.Циллер). Каждый из них прямо или косвенно связан с явлением изотропной неприводимости.

Доказательство. Следующее рассуждение в основном принадлежит К.Бему. [6]. Достаточно доказать первое утверждение теоремы. Тогда по основной теореме из [BWZ] последовательность g_i имеет в $\mathcal{M}_1^G$ предельную точку — метрику Эйнштейна.

Вначале напомним основные факты. Многообразие метрик $\mathcal{M}_1^G$ само по себе является некомпактным римановым симметрическим пространством. Оно имеет конечную положительную размерность, поскольку G/H изотропно приводимо. Подмножество эйнштейновых метрик $\mathcal{E}(G,H) \subset \mathcal{M}_1^G$ совпадает с множеством $K = \{g : \nabla\,\mathrm{sc}(g) = 0\}$ критических точек функции $\mathrm{sc}(g)$ (теорема Гильберта–Йенсена [Jen2]). Градиент $\nabla\,\mathrm{sc}$ в каждой точке $g \in \mathcal{M}_1^G$ естественно отождествляется со взятой с обратным знаком бесследовой частью тензора Риччи метрики g :

$$(\nabla\,\mathrm{sc})_g = \frac{\mathrm{sc}(g)}{n} g - \mathrm{ric}(g), \qquad \forall\, g \in \mathcal{M}_1^G.$$

В левой части этого равенства стоит касательный вектор к $\mathcal{M}_1^G$, а в правой — тензорное поле на римановом многообразии $(G/H, g)$. Риманова метрика $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{M}_1^G$ определяется так, что для каждого g квадрат нормы вектора в левой части относительно $(\cdot,\cdot)_g$ совпадает с квадратом нормы поля на $(G/H, g)$, стоящего в правой части (т.е. поля $-\,\mathrm{ric}^0(g)$), вычисленным в точке eH и в любой другой точке $x \in G/H$, а тогда и с квадратом L^2-нормы этого поля.

Выведем теорему из свойств (a)–(d). В силу (b) подпространство X_ε является ретрактом окрестности $U \subset \mathcal{S}$. В особых случаях $X_\varepsilon = \varnothing$ или

---

[6] Далее вольно излагается первая часть доказательства теоремы [Bo, Th. 8.1], которая может служить и доказательством теоремы [Bo, Th. 1.4], если заменить ограничение $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ на нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ более общим условием конечности $\mathcal{K}$. (Мы отбрасываем оба эти ограничения.) Там через X_{ent}^{Σ} ('расширенное пространство неторальных направлений') обозначено пространство, аналогичное X_ε, а через $X_{G/H}^{\Sigma}$ ('нерв') — образ $\|\mathcal{K}\|$ в Σ в случае семейства 2).

$\mathcal{S}$ это значит, что $U = X_\varepsilon$. Определим три подмножества в $\mathcal{M}_1^G$ равенствами

$$C = \{r(t) : r \in U,\, t > t_0\}, \qquad t_0 > 0,$$
$$B = \{r(T_0) : r \in \|\mathcal{K}\|\}, \qquad T_0 > t_0,$$
$$M = \{g \in \mathcal{M}_1^G : sc(g) > k\}, \qquad k \ggg 0.$$

В силу (a) и (d), существуют k и T_0 такие, что $C \supset M \supset B$. Фиксируем такие числа t_0, T_0 и k. Ясно, что B гомеоморфен $\|\mathcal{K}\|$. По условию теоремы, B — нестягиваемый компакт. Тогда в силу (c) B не стягиваем по цилиндру C, а значит, и по множеству M. Введем в рассмотрение конус A над B с вершиной Q :

$$A = \{r(t) : r \in \|\mathcal{K}\|,\, 0 \leqslant t \leqslant T_0\}.$$

Используя (d), на этот раз, при небольших значениях t, находим, что $\mathrm{sc}(g) > 0$ для всех $g \in A$. В особом случае, если $X_\varepsilon = \varnothing$, положим $A := \{Q\}$ и заметим, что $\mathrm{sc}(Q) > 0$. Пусть некоторое непрерывное отображение $\Phi : \mathcal{M}_1^G \to \mathcal{M}_1^G$ нестрого увеличивает скалярную кривизну и сужение $\Phi|_M$ гомотопно id_M. Тогда

$$\Phi(B) \subset \Phi(M) \subset M, \qquad \Phi(A) \not\subset M.$$

(В противном случае, при $\Phi(A) \subset M$, подмножество B стягивалось бы по M в точку $\Phi(Q)$, что невозможно.) Бем определяет полугруппу таких отображений Φ_u, $u \geqslant 0$, где $\Phi_0 = \mathrm{id}$. Она порождается полным векторным полем ξ на $\mathcal{M}_1^G$:

Лемма 2.3 ([Bo]). *На $\mathcal{M}_1^G$ существует гладкое (полное) векторное поле ξ с неподвижным множеством $K = \{g : \nabla\,\mathrm{sc}(g) = 0\}$, увеличивающее скалярную кривизну $\mathrm{sc}(g)$ и пропорциональное ее градиенту, удовлетворяющее неравенству $\|\xi_g\|_g \leqslant 1$ на всем пространстве метрик и уравнению $\|\xi_g\|_g = 1$ на дополнении некоторого шара.*

(В случае $K = \varnothing$, который требуется исключить, лемме удовлетворяет, очевидно, $\xi = \frac{1}{\|\nabla\,\mathrm{sc}\|}\nabla\,\mathrm{sc}$; для доказательства теоремы этого достаточно.) Существует бесконечная последовательность метрик $P_j \in A$, $j = 1, 2, \ldots$ такая, что $\Phi_j(P_j) \notin M$, т.е. $\mathrm{sc}(\Phi_j(P_j)) \leqslant k$. Она имеет в A предельную точку $g_0 \in A$, удовлетворяющую неравенству $k_0 := \mathrm{sc}(g_0) > 0$, ибо A компактен и на всем A скалярная кривизна строго положительна. Проведем через g_0 интегральную кривую $g_u = \Phi_u(g_0)$, $u \geqslant 0$. Тогда, очевидно,

$$k \geqslant \mathrm{sc}(g_u) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{sc}(\Phi_u(P_{j_m})) \geqslant k_0 > 0, \qquad \forall\, u \geqslant 0$$

(т.е. наша кривая не входит в M) и сходится интеграл $\int_0^\infty (\xi \cdot \mathrm{sc})(g_u)\, du \leqslant k - k_0$, где $(\xi \cdot \mathrm{sc})(g_u) = \frac{d}{du}\,\mathrm{sc}(g_u) = \|\xi_{g_u}\|_{g_u}\, \|(\nabla\,\mathrm{sc})_{g_u}\|_{g_u}$. Окончательно, наша интегральная кривая содержит последовательность метрик $g_{u(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, $u(i) > i$, удовлетворяющую теореме, и замыкание этой кривой содержит метрику Эйнштейна. □

Замечание 2.4. Лемма 2.3 следует из компактности K, доказанной в [BWZ].

Замечание 2.5. Используя доказательство [Bo, Prop. 5.6] (где употребляется обозначение $\gamma_v(t)$ для $r(t)$), можно доказать существование положительной постоянной c такой, что

$$\mathrm{sc}(\gamma_v(t)) \geqslant c\, e^{t/\sqrt{n(n-1)}} > 0, \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad \forall\, r \in \|\mathcal{K}\| \quad (n = \dim G/H).$$

Для этого запишем полученное там красивое неравенство для скалярной кривизны в виде:

$$\mathrm{sc}(\gamma_v(t)) \geqslant \sum_{i=1}^{p+1} (\mathrm{s}(\mathfrak{k}_i) - \mathrm{s}(\mathfrak{k}_{i-1})) e^{-t\widehat{v}_i}, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0 < \mathfrak{k}_1 < \ldots < \mathfrak{k}_{p+1} = \mathfrak{g},$$

где $\widehat{v}_i$ и $\mathrm{s}(\mathfrak{k}_i)$ — возрастающие числовые последовательности:

$$\widehat{v}_1 < \ldots < \widehat{v}_{p+1}, \qquad 0 = \mathrm{s}(\mathfrak{h}) < \mathrm{s}(\mathfrak{k}_1) < \ldots < \mathrm{s}(\mathfrak{g}) = \mathrm{sc}(Q),$$

$\widehat{v}_1 < \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} < \widehat{v}_{p+1}$ и $\mathrm{sc}(Q) = \mathrm{sc}(G/H, Q) > 0$ — скалярная кривизна нормальной однородной метрики на G/H. Для кривизны $\mathrm{s}(\mathfrak{g})$ имеется явное выражение Вана–Циллера через формы Киллинга $B_{\mathfrak{h}}$ и $B_{\mathfrak{g}}$ и квадратичный элемент Казимира $C = C_{\mathfrak{h},Q} \in Z(U(\mathfrak{h}))$; см. [WZ-85, Prop. 1.9] или [AB, формула (7.89b)], ср. [WZ2, лемма 1.5] или [Bo, лемма 4.16]. Остальные члены последовательности $\mathrm{s}(\mathfrak{k}_i)$ можно записать в виде $\mathrm{s}(\mathfrak{k}_i) = \mathrm{sc}(K_i/H, Q)$ и задать аналогичными формулами. Вообще, для любой подалгебры $\mathfrak{k}$ вида 1) можно определить скалярную кривизну $\mathrm{s}(\mathfrak{k}) > 0$ подходящего однородного пространства K/H :

$$\mathrm{s}(\mathfrak{k}) = \mathrm{sc}(K/H, Q) = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{tr}_Q(B_{\mathfrak{h}}) - \mathrm{tr}_Q(B_{\mathfrak{k}}) + \mathrm{tr}(C|\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}})\right)$$

(с другой стороны, суть дела в том, что это скалярная кривизна n-мерной асимптотической однородной римановой геометрии). Здесь $\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{k}$ — Q-ортогональное дополнение подалгебры $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}$. Функция $\mathrm{s}(\mathfrak{k})$ принимает конечно число значений $\varsigma_1 < \varsigma_2 < \ldots$, а на многообразии $\mathcal{K}$ подалгебр вида 1*) или 2) удовлетворяет условию $\mathrm{s}(\mathfrak{k}_1) < \mathrm{s}(\mathfrak{k}_2)$ при $\mathfrak{k}_1 < \mathfrak{k}_2$. Постоянную c можно определить как наименьшее значение ς_1 функции $\mathrm{s}(\mathfrak{k})$.

2.2. **Частные случаи $X_\varepsilon = \varnothing$ и $X_\varepsilon = \mathcal{S}$.** Обсудим экстремальные случаи в теореме 2.2. Начнем с простого случая $X_\varepsilon = \mathcal{S}$. С учетом односвязности G/H это условие эквивалентно каждому из следующих: $\|\mathcal{K}\| = \mathcal{S}$; каждое H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ соответствует подалгебре из семейства $\mathcal{K}$ (поэтому торальные H-подалгебры отсутствуют); с точностью до конечных групп, G/H разлагается в прямое произведение односвязных изотропно неприводимых однородных пространств (ясно, что представление изотропии имеет простой спектр); каждое H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ соответствует H-инвариантной подалгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$; функция скалярной кривизны $\mathrm{sc}(g)$, $g \in \mathcal{M}_1^G$, ограничена снизу положительной постоянной (согласно свойству (d)). Если

выполняется одно из этих условий, то функция $\mathrm{sc}(g)$ на $\mathcal{M}_1^G$ достигает глобального минимума, который является (очевидно, единственной) инвариантной метрикой Эйнштейна. Ср. [WZ2, теорема 2.1].

Пусть теперь $X_{\mathcal{E}} = \varnothing$. Это условие эквивалентно каждому из следующих: $\|\mathcal{K}\| = \varnothing$; $\mathcal{K} = \varnothing$; всякая H-инвариантная подалгебра, заключенная строго между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, является торальной (т.е. разлагается в прямую сумму подалгебры $\mathfrak{h}$ и абелевой подалгебры); функция скалярной кривизны $\mathrm{sc}(g)$, $g \in \mathcal{M}_1^G$, ограничена сверху (согласно свойству (a), – последняя эквивалентность получена в [Bo]). М.Ваном и В.Циллером в случае связных G и H и К.Бемом в общем случае [WZ2, теоремы 2.2 и 2.4], [Bo, теоремы 1.2 и 5.22] доказано, что функция $\mathrm{sc}(g)$ на $\mathcal{M}_1^G$ достигает глобального максимума, который является метрикой Эйнштейна.

2.3. **Приложение критерия.** Докажем версию теоремы о графе, сформулированную после теоремы C. Для этого рассмотрим семейства $\mathcal{L}$ всех почти полупростых подалгебр вида 1*) и подсемейство $\mathcal{L}^{\min} \subset \mathcal{L}$ подалгебр вида 2). Обозначим через $[\mathfrak{l}]$ орбиту каждой подалгебры $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ относительно $\mathrm{Norm}_G(H)^0$. Обозначим через B_{WZ} граф с вершинами $[\mathfrak{l}]$, $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$, и ребрами $([\mathfrak{k}], [\mathfrak{l}])$, где $\mathfrak{k} < \mathfrak{l}$. Пусть $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$ — подграф этого графа, индуцированный на подмножестве вершин $[\mathfrak{k}]$, $\mathfrak{k} \in \mathcal{L}^{\min}$. Тогда

$$\mathrm{B}_{WZ}^{\min} \subset \mathrm{B}_{WZ} \subset \Upsilon_{WZ}.$$

Здесь Υ_{WZ} — та часть графа Вана–Циллера, несвязность которой, согласно [BWZ], приводит к существованию инвариантной эйнштейновой метрики на G/H.

Используя свойство конечности $\mathcal{L}/\,\mathrm{Norm}_G(H)^0$ и $\mathcal{L}^{\min}/\,\mathrm{Norm}_G(H)^0$, находим:

Лемма 2.6. *Существуют непрерывные сюръективные отображения компактов $\|\mathcal{K}\| = \|\mathcal{L}\|$ и $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ на флаговые комплексы K_Γ графов $\Gamma = \mathrm{B}_{WZ}$ и $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$ соответственно.*

Отметим, что $\|\mathcal{L}\|$ и $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ гомотопически эквивалентны по теореме B.

Доказательство. Вершины $[\mathfrak{k}_i]$, $i = 1, \ldots, r$ каждого полного подграфа $\Sigma \subset \Gamma$ можно упорядочить так, что, без потери общности, $\dim(\mathfrak{k}_1) > \ldots > \dim(\mathfrak{k}_r)$. Используя свойство конечности, находим по индукции, что существуют подалгебры $\mathfrak{f}_i \in [\mathfrak{k}_i]$, образующие флаг $\varphi = (\mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_r)$. Определим отображение q_φ симплекса $\|\varphi\|$ на симплекс $|\Sigma|$ формулой $q_\varphi(\sum_{i=1}^r \lambda_i \chi^{\mathfrak{f}_i}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i [\mathfrak{f}_i]$, где λ_i — барицентрические координаты. Отображение множеств $q = \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K})} q_\varphi : \|\mathcal{K}\| \to |K_\Gamma|$ корректно определено. Рассмотрим прообраз $Z = q^{-1}(|\Sigma|)$ каждого симплекса $|\Sigma|$ комплекса $|K_\Gamma|$. Обозначим через $Y \subset [\mathfrak{k}_1] \times \ldots \times [\mathfrak{k}_r]$ многообразие флагов и заметим, что естественную проекцию $Y \times |\Sigma|$ на $|\Sigma|$ можно пропустить

через непрерывное отображение $Y \times |\Sigma|$ на Z и сужение $q|Z$. Следовательно, каждое Z компактно и сужение q на Z непрерывно, а число таких подмножеств Z конечно. Поэтому q непрерывно. $\square$

Из леммы и теоремы С вытекает:

Следствие 2.7. *Если любой из графов* B_{WZ} *или* $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$ *несвязен, на* G/H *существует инвариантная метрика Эйнштейна.*

По наблюдению [BWZ, Prop. 4.9], если G/H имеет конечную фундаментальную группу и $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \geqslant 1$, то граф Υ_{WZ} содержит не более одной связной компоненты. Тогда критерий, основанный на несвязности графа Υ_{WZ}, ничего не дает, по крайней мере, при $\Upsilon_{WZ} \neq \varnothing$, но действует критерий, основанный на несвязности его подграфов.

С другой стороны, как замечено в [Bo, Corollary 7.6], если все подалгебры $\mathfrak{k} < \mathfrak{g}$ вида 4) содержатся в одной и той же собственной подалгебре, то соответствующая симплициальная схема $\Delta(\mathcal{K})$ стягиваема.

Пользуясь двумя этими признаками, можно построить однородные пространства G/H с несвязным графом $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$, о которых оригинальные критерии [BWZ] и [Bo] ничего не позволяют утверждать, а предыдущее следствие утверждает существовании инвариантных метрик Эйнштейна.

Пример 2.8 (13.07.2011)**.** Пусть $G = U_N$ — группа унитарных преобразований пространства $V = \mathbb{C}^N = \bigvee^p \mathbb{C}^3$, $N = \binom{p+2}{2}$; U_{N-1} — стабилизатор вектора $v = \otimes^p e_3 \in V$; $R : U_3 \to G$ — p-я симметрическая степень основного представления группы U_3, $p > 1$; $K = R(U_3)$ и $H = K \cap U_{N-1}$ — четырехмерная подгруппа; так что G/H — компактное однородное пространство размерности > 31. Заметим, что $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} < \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{h} + \mathfrak{su}_3$ одновременно является максимальной подалгеброй и минимальной неторальной H-подалгеброй. Поэтому $[\mathfrak{k}]$ будет изолированной (легко видеть, что не единственной) вершиной графа $\mathrm{B}_{WZ}^{\min}$; этот граф несвязен и по предыдущему следствию на G/H существует инвариантная метрика Эйнштейна. — Попытаемся теперь воспользоваться критериями [BWZ] и [Bo]. Очевидно, V расщепляется на попарно неэквивалентные неприводимые H-модули V_k, $\dim_{\mathbb{C}} V_k = k+1$, $k = 0, \ldots, p$. Отсюда централизатор H в G будет тором T^{p+1}, и $[\mathfrak{k}]$ — его p-мерной орбитой $Ad(T^{p+1})\mathfrak{k}$. Поэтому семейство подалгебр 2) бесконечно и критерий Бема имеет смысл формулировать для семейства 4). Разлагая $\mathfrak{g}$ по представлениям тора T^{p+1}, легко доказать, что каждая подалгебра вида 4) содержится в $\mathfrak{u}_{N-1}$ Тогда полиэдр Бема стягиваем по сформулированному выше признаку [Bo, Corollary 7.6] (сверх того, при $p = 2$ он состоит из единственной точки $[\mathfrak{h} + \mathfrak{su}(V_1)]$). Далее, $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = 1$ и тогда граф Вана–Циллера связен по признаку [BWZ, Prop. 4.9]. Значит, в рассмотренном случае критерии [BWZ] и [Bo] недостаточны. [7)]

[7)] При построении примера я отталкивался от [BWZ, Example 6.3]. Ср. также [Bo-Ke, §3].

Пусть теперь $Z \subset G$ — замкнутая связная коммутативная нормальная подгруппа, $\overline{G} = G/Z$ и $\overline{H} = H/H \cap Z$. Легко убедиться, что при переходе от G, H к $\overline{G}, \overline{H}$ компакты $\|\mathcal{L}\|$ и $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ сохраняются, если фундаментальная группа $\pi_1(G/H)$ конечна.

Из теоремы С вытекает:

Следствие 2.9. *Нестягиваемость $\|\mathcal{L}\|$ или $\|\mathcal{L}^{\min}\|$ приводит к существованию инвариантных метрик Эйнштейна сразу на G/H и $\overline{G}/\overline{H}$.*

В качестве важного примера рассмотрим факторпространство

$$\overline{G}/\overline{H} = (G_1/H_1 \times \ldots \times G_p/H_p)/Z,$$

где $p \geqslant 2$ и каждое G_i/H_i — односвязное однородное пространство Эйнштейна. При $i = 1$ наложим условие $\widetilde{H}_*(\|\mathcal{L}_1^{\min}\|) \neq 0$, где $\widetilde{H}_q$ означает q-ю группу сингулярных гомологий, приведенных по модулю точки. Пусть G_i/H_i, для каждого $i > 1$, будет главным расслоением окружностей над неприводимым эрмитовым симметрическим пространством, снабженным естественной геометрией Сасаки-Эйнштейна с полной группой изометрий G_i. Имеем $\|\mathcal{L}^{\min}\| = \|\mathcal{L}_1^{\min}\| * S^{p-2}$ (см. следующее замечание). Отсюда $\widetilde{H}_q(\|\mathcal{L}^{\min}\|) = \widetilde{H}_{q-p+1}(\|\mathcal{L}_1^{\min}\|)$ для каждого q (см., например: А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, М.:1989, §13, Теорема 2). Поэтому $\overline{G}/\overline{H}$ будет однородным пространством Эйнштейна.

Можно построить аналогичные примеры, заменив эрмитовы симметрические пространства однородными пространствами Кэлера–Эйнштейна. Имеются гомеоморфизмы

$$\|\mathcal{L}\| = \|\mathcal{L}_1\| * \cdots * \|\mathcal{L}_p\| * S^{p-2}$$

и такой же для $\|\mathcal{L}^{\min}\|$. Тогда $\widetilde{H}_*(\|\mathcal{L}\|) = \widetilde{H}_*(\|\mathcal{L}^{\min}\|)$ можно выразить через приведенные гомологии сомножителей, воспользовавшись хорошо известным обобщением формулы Кюннета на джойны.

Замечание 2.10. Пусть $G/H = G_1/H_1 \times \ldots \times G_p/H_p$ — декартово произведение $p \geqslant 2$ нетривиальных однородных пространств ($G = G_1 \times \ldots \times G_p$, $H = H_1 \times \ldots \times H_p$, $H_i \subset\neq G_i$). Тогда при условии $|\pi_1(G/H)| < \infty$ выполняется

$$\|\mathcal{L}\| \supset \|\mathcal{L}_1\| * \cdots * \|\mathcal{L}_p\| * S^{p-2} \tag{2.1}$$

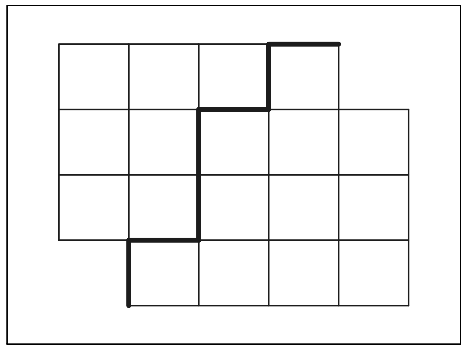
(где S^k — это k-мерная сфера и $*$ — джойн топологических пространств). Кроме того, если $\mathfrak{g}_i + \mathfrak{h} \in \mathcal{L}^{\min}$, $i = 1, \ldots, p$, то

$$\|\mathcal{L}^{\min}\| \supset \|\mathcal{L}_1^{\min}\| * \cdots * \|\mathcal{L}_p^{\min}\| * S^{p-2}. \tag{2.2}$$

Включения (2.1) и (2.2) можно заменить гомеоморфизмами, если каждая почти полупростая подалгебра $\mathfrak{k} \in \mathcal{L}$ равна сумме своих проекций на $\mathfrak{g}_i$. Например, $\|\mathcal{L}\| = \|\mathcal{L}^{\min}\| = S^{p-2}$ для $G/H = (SU_2/T^1)^p$.

Рис. 1. К доказательству (2.3), $p = 2$

Схема поясняет триангуляцию надстройки $J{*}S^0$ джойна J двух упорядоченных симплексов размерностей 3 и 2. Жирная ломаная, лестница, задает один из максимальных симплексов триангуляции.



Замечание 2.11. Эти свойства аналогичны следующей теореме из [Bo], относящейся к семействам $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_i$ подалгебр вида 4) (напомним, что такие семейства конечны):

$$\|\mathcal{K}\| \approx \|\mathcal{K}_1\| * \cdots * \|\mathcal{K}_p\| * S^{p-2}. \tag{2.3}$$

Здесь $\approx$ можно корректно понимать как гомеоморфизм, если все $\|\mathcal{K}_i\|$ нестягиваемы, и в общем случае — как гомотопическую эквивалентность [8]. Отметим, что при $\mathfrak{g}_{i_0} + \mathfrak{h} \notin \mathcal{K}$ полиэдры $\|\mathcal{K}_{i_0}\|$ и $\|\mathcal{K}\|$ стягиваемы. Например, при $\#\mathcal{K}_1 = \#\mathcal{K}_2 = 1$, $p = 2$, полиэдры $\|\mathcal{K}\|$ и $\|\mathcal{K}_1\| * \|\mathcal{K}_2\|$ гомеоморфны отрезкам, а $\|\mathcal{K}_1\| * \|\mathcal{K}_2\| * S^0$ — надстройке над отрезком, т.е. квадрату. Этот случай возможен. Для каждого из перечисленных ниже 11-мерных однородных пространств Эйнштейна, открытых М.Ваном, выполняется $\#\mathcal{K} = \#\mathcal{L} = 1$:

$$SU(3) \times SU(3)/\Delta SU(2)(U(1) \times U(1)),$$
$$Sp(2) \times Sp(2)/\Delta SU(2)(Sp(1) \times Sp(1)),$$
$$SU(3) \times Sp(2)/\Delta SU(2)(U(1) \times Sp(1)).$$

Пример эффективного использования теоремы (2.3) имеется на последней странице в [Bo-Ke]. Ее доказательство можно пояснить рисунком 1.

[8] В оригинальной формулировке (2.3) — просто гомеоморфизм. В доказательстве для $p = 2$ там упомянуты все пропущенные случаи, а именно, джойн $J = \|\mathcal{K}_1\| * \|\mathcal{K}_2\|$ двух симплициальных комплексов и конусы над J.

§ 3. Соглашение о выборе модели

Мы переходим к последовательному изложению. Через G мы обозначаем компактную группу Ли, через H – ее компактную подгруппу, не содержащую связных нормальных делителей. Для заданной $Ad(G)$-инвариантной евклидовой метрики Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ обозначим снова через Q ассоциированную риманову метрику на G/H. Условимся, что $Q \in \mathcal{M}_1^G$.

Множество $\mathcal{S}$ геодезических лучей на $\mathcal{M}_1^G$, выходящих из Q, мы будем рассматривать как топологическую сферу и определим две модели этой сферы:

1-я модель: единичная сфера Σ евклидова пространства $Ad\,(H)$-инвариантных симметрических операторов со следом 0 на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$;

2-я модель: граница $\mathtt{S} = \mathtt{S}[\mathfrak{h}]$ однородного шара $\mathtt{D}^*[\mathfrak{h}]$, состоящего из всех положительно определенных $Ad\,(H)$-инвариантных симметрических операторов со следом 1 на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

В [BWZ, Bo] используется первая модель, а мы для упрощения записей будем пользоваться второй. Это приводит к непохожим описаниям одних и тех же подпространств (W^{Σ} и других) сферы $\mathcal{S}$ и другим внешним отличиям. Поясним, что первая, исходная, модель для $\mathcal{S}$ строится естественным образом, а вторая связана с нею гомеоморфизмом $\mathrm{h} : \mathtt{S} \to \Sigma$. Вот формулы для h и h^{-1} : $v = \mathrm{h}(A) = \frac{A - 1_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}/n}{\sqrt{|A|^2 - 1/n}}$, $A = \mathrm{h}^{-1}(v) = \frac{1}{n}(1_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} - \frac{v}{\lambda(v)})$, где $\lambda(v)$ — наименьшее собственное значение бесследового оператора v, $\lambda(v) < 0$, а $n = \dim(G/H)$.

Отсюда сразу видно, например, что каждый 'страт Бема' $W^{\Sigma}(\mathfrak{k}) \subset \Sigma$ и его замыкание $X^{\Sigma}(\mathfrak{k})$ содержатся в открытой полусфере, что не было замечено в [Bo]. Определение $X^{\Sigma}(\mathfrak{k})$ приведено в следующем разделе.

Далее о различии между моделями 1 и 2 обычно не упоминается.

§ 4. Определения

Пространство фильтрующих линейных операторов на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В работе К.Бема об однородных эйнштейновых метриках [Bo] доказано существование строгих деформационных ретракций вида $C \to B$, где C – компактное подпространство топологической сферы $\mathtt{S}$ и $B \subset C$ – симплициальный комплекс. Этот комплекс можно построить, исходя из некоторого [9] набора подалгебр $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вершины комплекса B суть линейные операторы $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}} := \frac{1}{\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{f})}(1_{\mathfrak{g}} - 1_{\mathfrak{f}})$ (см. ниже). Симплексы комплекса B суть прямолинейные симплексы

$$/\varphi/ = \mathrm{Convex\,hull}\,\{\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}, i = 1, \ldots, r\},$$

[9] Подалгебры $\mathfrak{f}$, используемые в финальных конструкциях Бема, соответствуют замкнутым подгруппам компактной группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и удовлетворяют ряду других условий.

где $\varphi = (\mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_r)$ — убывающий флаг подалгебр $\mathfrak{f}_i$, $\mathfrak{g} > \mathfrak{f}_i > \mathfrak{h}$. Все пространство $C \supset B$ (с точностью до гомеоморфизма $\mathrm{h} : \mathtt{S} \to \Sigma$) лежит в пересечении сферы $\mathtt{S}$ и компакта $\mathfrak{F}_+$, к определению которого мы приступаем. Для этого нам понадобится понятие фильтрующего линейного оператора на $\mathfrak{g}$.

Фиксируем евклидово скалярное произведение $Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ на компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющее тождеству $Q([X,Y],Z) \equiv Q(X,[Y,Z])$. Линейный оператор $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется симметрическим, если $Q(AX,Y) \equiv Q(X,AY)$. Свяжем с A семейство векторных подпространств F_a, индексированное любыми числами $a \in \mathbb{R}$

$$F_a = \operatorname{span}\{X \in \mathfrak{g} : \exists\, r \leqslant a,\ AX = rX\}$$

Тогда $F_a \subset F_b$ при $a \leqslant b$. Мы будем называть **фильтрующим** каждый симметрический оператор A, для которого $(F_a)_{a\in\mathbb{R}}$ является фильтрацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. выполняются эквивалентные условия:

1) $[F_a, F_b] \subset F_{a+b}$, для любых $a, b \in \mathbb{R}$,
2) для каждых $X, Y \in \mathfrak{g}$ существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}[e^{-tA}X, e^{-tA}Y]$,
3) неравенства $|C^k_{i,j}|^2\,(\lambda_k - \lambda_i - \lambda_j) \leqslant 0$ для собственных чисел λ_i оператора A и структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно собственного базиса.

Например, каждой подалгебре $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ можно сопоставить фильтрующий оператор $\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}$, заданный формулой $\boxed{\overline{\chi}^{\mathfrak{k}} := \frac{1}{\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})}(1_{\mathfrak{g}} - 1_{\mathfrak{k}}).}$ Он соответствует следующей фильтрации $(F_a)_{a\in\mathbb{R}}$:

$$F_a = 0 \text{ при } a < 0,\ \mathfrak{k} \text{ при } 0 \leqslant a < \tfrac{1}{\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})},\ \mathfrak{g} \text{ при } \tfrac{1}{\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})} \leqslant a.$$

Отметим, что для всякого фильтрующего оператора A

$$F_0 \supset \ker(A) \supset [F_0, F_0], \qquad [A, \operatorname{ad}(F_0)] = 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}_+$ топологическое пространство всех фильтрующих **неотрицательных** симметрических операторов A со следом 1 на $\mathfrak{g}$. Тогда $\overline{\chi}^{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{F}_+$.

Основная лемма 4.1. *Утверждается, что $\mathfrak{F}_+$ — компактное полуалгебраическое множество.*

Доказательство. Запишем для $\mathfrak{F}_+$ систему полиномиальных неравенств. Сопоставим каждому оператору $A \in \mathfrak{F}_+$ цепочку $v_1 = -A.c, \ldots v_{i+1} = -A.v_i$, $i = 1, 2, \ldots$ векторов пространства $\mathfrak{g} \otimes \wedge^2\mathfrak{g}^*$:

$$c = [\cdot,\cdot],\ v_1 = -A.c = [A\cdot,\cdot] + [\cdot, A\cdot] - A[\cdot,\cdot],\ \ldots.$$

Тогда $-A$ индуцирует на $V = \operatorname{span}\{v_i, i = 1, 2, \ldots\}$ симметрический оператор с простым строго положительным спектром. Образуем последовательность D_k , $k = 1, 2, \ldots$ главных угловых миноров бесконечной матрицы $(a_{i,j})$ скалярных произведений $a_{i,j} = a_{i+j-1,1} = (-A.v_i, v_j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$. Имеем $0 < a_{i,j} \leqslant 2^{i+j+1}|c|^2$, откуда по формуле для объемов

параллелепипедов следует $0 \leqslant D_i \leqslant a_{i,i} D_{i-1} \leqslant 2^{2i+1}|c|^2 D_{i-1} \leqslant E_0^{-i} D_{i-1}$ (E_0 — число, не зависящее от A). Обратно, каждый симметрический оператор A на $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий системе нестрогих полиномиальных неравенств с фиксированным $E > 0$:

$$D_i(A) \geqslant E^{i+1} D_{i+1}(A) \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет строгим неравенствам $D_i(A) > 0$, $i = 1, \dots, \dim(V)$, откуда по теореме Сильвестра $(-A.v, v) > 0$ для всех $v \in V \setminus 0$; такой оператор A будет фильтрующим, что доказывает утверждение. $\square$

Отметим, что при компактном односвязном G/H множество $\mathfrak{F}_+$ вполне определено предыдущими неравенствами и уравнениями $A\mathfrak{h} = 0$, $\mathrm{trace}(A) = 1$, $E = E_0$ (т.е. условие неотрицательности спектра для A становится следствием).

Компактное пространство $\mathtt{W} \simeq W^\Sigma$ вырожденных фильтраций. Фильтрующий оператор $A \in \mathfrak{F}_+$ называется **вырожденным относительно собственной подалгебры** $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, если

$$\mathfrak{h} < F_0 = \ker(A) < \mathfrak{g}.$$

Фиксируем компактную группу $\mathcal{A}$ автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющую $\mathfrak{h}$ и Q (в [Bo] встречаются, например, группа $Ad(H)$ и ее торальное расширение).

Обозначим через $\mathtt{W}$ пространство всех $\mathcal{A}$-инвариантных фильтрующих операторов $A \in \mathfrak{F}_+$, вырожденных относительно подалгебры $\mathfrak{h}$.

Очевидно, $\mathtt{W}$ наследует у $\mathfrak{F}_+$ свойства компактности и полуалгебраичности.

Лемма 4.2. *Ядро $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ каждого оператора $A \in \mathtt{W}$ является $\mathcal{A}$-инвариантной подалгеброй, заключенной строго между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, т.е. $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} < \mathfrak{g}$.*

В [Bo] подробно изучается компактное топологическое пространство W^Σ, (полуалгебраически) гомеоморфное пространству $\mathtt{W}$. (Пространство W^Σ лежит на сфере $\{A : A\mathfrak{h} = 0,\ \mathrm{trace}(A) = 0,\ \mathrm{trace}(A^2) = 1\}$. Мы будем пользоваться несферической моделью $\mathtt{W}$ этого пространства; сферическая модель получается из нее простыми арифметическими действиями).

Следуя [Bo] определим разбиение компакта $\mathtt{W}$ на подмножества $\mathtt{X}^*[\mathfrak{k}]$ операторов с фиксированным ядром $F_0 = \mathfrak{k}$. Замыкание каждого из этих подмножеств выражается формулой $\mathtt{X}[\mathfrak{k}] = \{A \in \mathtt{W} : A\mathfrak{k} = 0\}$. Оно отождествляется с определенным в [Bo, §5.4] компактным звездным полуалгебраическим множеством $X^\Sigma(\mathfrak{k}) \subset W^\Sigma$.

Грубая эскизная версия пространства W^Σ. Назовем грубой эскизной версией пространства W^Σ (компактное) топологическое пространство всех $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантных неотрицательных симметрических операторов A со следом 1 на $\mathfrak{g}$, удовлетворяющих условиям $AX = 0$, $A\,\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X)A$ для всех $X \in \mathfrak{h}$ и некоторого $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{h}$.

Грубая эскизная версия $\mathtt{W}_{\mathtt{draft}}$ топологического пространства W^{Σ} представляет собой объединение замкнутых клеток (гомеоморфных шарам), такое, что непустое пересечение клеток является клеткой и каждая клетка D, собственно содержащаяся в клетке D_1, лежит на граничной сфере шара D_1 (вообще говоря, граничная сфера НЕ покрыта такими клетками D). Клетки однозначно соответствуют $(\mathcal{A},\mathfrak{h})$-инвариантным подалгебрам $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}<\mathfrak{k}<\mathfrak{g}$, и обозначаются через $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$; их можно задать равенствами

$$\mathtt{D}[\mathfrak{k}]=\{A\in\mathtt{W}_{\mathtt{draft}}:A\mathfrak{k}=0,[A,\mathrm{ad}(\mathfrak{k})]=0\}. \tag{4.1}$$

Пространство $\mathtt{W}_{\mathtt{draft}}$ лежит на граничной сфере нового шара $\mathtt{D}[\mathfrak{h}]$, т.е., строго говоря, выпуклого компакта, определяемого как множество всех симметрических линейных операторов со следом 1 и неотрицательными собственными значениями, аннулирующих $\mathcal{A}$-инвариантную подалгебру $\mathfrak{h}<\mathfrak{g}$ и перестановочных с $\mathcal{A}$ и $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$. В формуле для $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ можно заменить $\mathtt{W}_{\mathtt{draft}}$ на $\mathtt{D}[\mathfrak{h}]$, $\mathfrak{h}\geqslant 0$.

Пространство $\mathtt{W}\simeq W^{\Sigma}$ вложено в свою грубую эскизную версию так, что пересечение $\mathtt{W}$ с каждой клеткой $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ выражается формулой

$$\mathtt{D}[\mathfrak{k}]\cap\mathtt{W}=\mathtt{X}[\mathfrak{k}]:=\{A\in\mathtt{W}:A\mathfrak{k}=0\} \tag{4.2}$$

Подмножество $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ является звездным, компактным и полуалгебраическим. Центр звезды $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]\simeq X^{\Sigma}(\mathfrak{k})$ может рассматриваться как центр шара $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ и находится в точке

$$A=\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}. \tag{4.3}$$

Звезда $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ содержит стандартный евклидов шар $\{A\in\mathtt{D}[\mathfrak{k}]:|A-\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}|\leqslant\frac{1}{3\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})}\}$. Эти свойства $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ будут пояснены в следующем пункте.

Совсем другая версия пространства W^{Σ} рассматривается в замечании.

Замечание 4.3 (см. [BWZ], §3)**.** Построим BWZ-оболочку $\mathtt{E}$ подмножества $\mathtt{W}$ в граничной сфере $\mathtt{S}$ шара $\mathtt{D}[\mathfrak{h}]$. Фиксируем последовательность вещественных чисел $b_0=0<a_1<b_1<\ldots<a_{k-1}<b_{k-1}=1/n=\frac{1}{\dim(G/H)}$ такую, что всякий раз $2a_i<b_i$. Назовем интервал $[a_i,b_i]$, $i=1,\ldots,k-1$ пустым, если он не содержит собственных чисел оператора A, а потому $F_{a_i}=F_{2a_i}$. При достаточно большом k для всякого $A\in\mathtt{S}$ существует хотя бы один пустой интервал $[a_i,b_i]$. Положим $A\in\mathtt{E}$, если для каждого пустого интервала $[a_i,b_i]$ подпространство $F_{a_i}\subset\mathfrak{g}$ является подалгеброй, т.е. $[F_{a_i},F_{a_i}]\subset F_{2a_i}$. Поэтому $\mathtt{W}\subset\mathtt{E}\subset\mathtt{S}$. При $\mathcal{A}=Ad(H)$, $a_i-b_{i-1}=\delta/n>0$ топологическое пространство $\mathtt{E}$ гомеоморфно обозначенному в [BWZ] через $\bigcup W_i^{\Sigma}$ (там $\alpha_i=1-nb_{k-1-i}$).

Конструкция для фильтрующих операторов и звездность $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$. Звездность $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]:=\mathtt{D}[\mathfrak{k}]\cap\mathfrak{F}_+$ нуждается в пояснении. Прежде всего, введем евклидову норму $|A|=\sqrt{\mathrm{trace}(A^2)}$ и заметим, что при $\mathfrak{k}\geqslant\mathfrak{h}\geqslant 0$ и $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]\neq$

$\{\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}\}$ подмножество $\Omega = \{A \in \mathtt{D}[\mathfrak{k}] : |A - \overline{\chi}^{\mathfrak{k}}| = \frac{1}{k\sqrt{5-\frac{1}{k}}}\}$, где $k = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, компакта $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ является евклидовой сферой.

Для фильтрующих операторов $A \in \mathfrak{F}_+$ возможна следующая конструкция.

Лемма 4.4. *$\Omega \subset \mathfrak{F}_+$ и для каждого $A \in \Omega$ существует число $t_A \geqslant 1$ такое, что*

$$A_t = t(A - \overline{\chi}^{\mathfrak{k}}) + \overline{\chi}^{\mathfrak{k}} \begin{cases} \in \mathfrak{F}_+, & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant t_A, \\ \notin \mathfrak{F}_+, & \text{если } \ t_A < t < \infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

Поэтому $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ звездно и содержит евклидов шар, ограниченный сферой Ω.

Доказательство. Пусть $A \in \Omega$ и $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ — набор собственных значений сужения $A|\mathfrak{k}^{\perp}$. Имеем $k > 1$, ибо $\Omega \neq \varnothing$. Убедимся, что $\lambda_i - 2\lambda_j \leqslant 0$ при $i \neq j$. Тогда оператор A будет фильтрующим в силу условий $A\mathfrak{k} = 0$ и $[A, \mathrm{ad}(\mathfrak{k})] = 0$. Для определенности положим $i = 1, j = k$ и рассмотрим k-мерный вектор

$$\overrightarrow{\mu} = k(1 + \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}, \ldots, \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k} - 2). \tag{4.5}$$

Имеем $|\overrightarrow{\mu}| = 1/R$, где R — радиус сферы Ω. Поэтому $k(\lambda_1 - 2\lambda_k) + 1 = (\overrightarrow{\lambda}|\overrightarrow{\mu}) \leqslant 1 = R|\overrightarrow{\mu}|$. Используя векторы $\overrightarrow{\mu}$, полученные из (4.5) любыми перестановками координат, находим $\lambda_i - 2\lambda_j \leqslant 0$ для всех $i \neq j$. Отсюда $A \in \mathfrak{F}_+$. Осталось воспользоватся следующим очевидным свойством:

(*) если прямая линия L соединяет различные коммутирующие операторы A', $A'' \in \mathfrak{F}_+$, $A'A'' = A''A'$, то $L \cap \mathfrak{F}_+$ есть отрезок.

Значит, $\{t \geqslant 0 : \overline{\chi}^{\mathfrak{k}} + t(A - \overline{\chi}^{\mathfrak{k}}) \in \mathfrak{F}_+\}$ — отрезок, содержащий 0 и 1. Это доказывает (4.4). $\square$

Где используется полуалгебраичность. Свойства полуалгебраичности (п.а.) и компактности можно проверить для различных подмножеств пространства симметрических линейных операторов, которые встречаются здесь и далее. Например, для аналогичных 'шаров' $\mathtt{D}[\mathfrak{h}]$ и $\mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ эти свойства сразу следуют из определений. Компактным п.а. множеством является также объединение $\mathtt{W}_{\mathtt{draft}} = \bigcup_{\mathfrak{h}<\mathfrak{k}} \mathtt{D}[\mathfrak{k}] = \mathrm{pr}_1\{(A, X) \in \mathtt{D}[\mathfrak{h}] \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) : |X| = 1,\ AX = 0,\ A\,\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X)\,A\}$. Это следует из теоремы Тарского-Сейденберга, гласящей, что проекция $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ на первый сомножитель переводит полуалгебраические подмножества в полуалгебраические. Полуалгебраичность $\mathtt{W}$ и $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ сразу следует из полуалгебраичности $\mathfrak{F}_+$. И т.д.

Помимо этих проверок, полуалгебраическая геометрия существенно используется в доказательствах двух следующих простых лемм.

Обозначим через $d(u, v)$ евклидово расстояние на $\mathbb{R}^N$.

Лемма 4.5 (о δ-окрестности)**.** *Пусть X и $T \subset X$ — непустые компактные п.а. подмножества в $\mathbb{R}^N$. Предположим, что для всякого $\delta > 0$ существует непрерывное п.а. отображение $f : X \times [0,1] \to X$, $(x,t) \mapsto f_t(x)$, удовлетворяющее условиям*

$$f_t(x) = x \text{ при } x \in T,\ t \in [0,1] \text{ и при } x \in X,\ t = 0;$$

$$d(f_t(x), T) \leqslant \delta \text{ при } x \in X,\ t = 1.$$

Тогда T является п.а. строгим деформационным ретрактом X.

Доказательство. По известной общей теореме полуалгебраической геометрии, существует п.а. гомеоморфизм конечного симплициального комплекса $|K|$ на X такой, что T есть объединение симплексов [a, Th. 9.2.1]. Поэтому T можно рассматривать как строгий деформационный ретракт своей компактной регулярной окрестности U во втором барицентрическом подразделении комплекса $|K|$. Обозначим п.а. строгую деформационную ретракцию U на T через $G(x,t)$, $x \in U, t \in [0,1]$. При достаточно малом δ окрестность U содержит $U_\delta = \{x \in X : d(x,T) \leqslant \delta\}$. (Ср. также доказательство [a, Prop. 9.4.4].) Поэтому существует функция $F : X \times [0,1] \to X$ вида

$$F(x,t) = \begin{cases} f_{2t}(x), & \text{если } \ 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ G(f_1(x), 2t-1), & \text{если } \ 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $F(x,t)$ непрерывна и полуалгебраична, ибо и то, и другое справедливо для ее сужений на замкнутые подмножества $\{t \leqslant 1/2\}$ и $\{t \geqslant 1/2\}$ в $X \times [0,1]$. Следовательно, F определяет п.а. строгую деформационную ретракцию X на T. Лемма доказана. □

Пусть $X = \mathtt{D}[\mathfrak{k}]$ или $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$, S — граничная сфера шара $D = \mathtt{D}[\mathfrak{k}]$, $Y \subset S \cap X$ — замкнутое полуалгебраическое подмножество (например, $Y = S \cap \mathtt{X}[\mathfrak{k}] = \bigcup_{\mathfrak{l} > \mathfrak{k}} \mathtt{X}[\mathfrak{l}]$) и T — объединение отрезков, соединяющих центр шара с точками $y \in Y$. В особых случаях, когда $Y = \varnothing$ или D сводится к точке, определим T как центр шара D.

Лемма 4.6 (о ретракции). *При этих условиях топологическое пространство T является строгим деформационным ретрактом пространства X (деформация — полуалгебраическая).*

Аналогичное утверждение см. в [Bo, теорема 5.39].

Лемма остается справедливой для любого компактного звездного п.а. подмножества X шара D. Докажем лемму. Используя выпуклость D, представим каждую точку $x \in D$ в виде $r\omega$, $r \in [0,1]$, $\omega \in S$, где для удобства центр шара D и звезды X помещен в точке 0. На граничной сфере S существует непрерывная полуалгебраическая (см. [a, Prop. 2.2.8]) функция $s(\omega) = \min(1, \delta^{-1} d(\omega, Y))$. Для каждого $t \in [0,1]$ пусть $f_t(r\omega) = (1 - s(\omega)t) r\omega$. Тогда $f_t(X) \subset X$ в силу звездности X. Очевидно,

при $t = 1$ для каждого $x = r\omega \in X$ существует $\alpha \in Y$ такой, что

$$d(f_1(r\omega), T) \leqslant d(f_1(r\omega), (1 - s(\omega))r\alpha) = (1 - s(\omega))s(\omega)\delta r \leqslant \frac{1}{4}\delta.$$

Осталось воспользоватья предыдущей леммой 4.5.

§ 5. Теоремы о ретракциях. Бабочки

Допустимый полиэдр $/\mathcal{K}/$. Каждому убывающему флагу $\varphi = (\mathfrak{f}_0, \ldots, \mathfrak{f}_r)$ подалгебр компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такому, что $\mathfrak{g} > \mathfrak{f}_i > \mathfrak{f}_{i+1}$, можно сопоставить евклидову выпуклую оболочку

$$/\varphi/ := \operatorname{Convex\,hull} \{\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i} : i = 0, \ldots, r\}$$

набора линейных симметрических операторов $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}$, $i = 0, \ldots, r$. Она будет r-мерным симплексом, поскольку разности $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i} - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_{i+1}}$ попарно ортогональны.

Теперь можно сопоставить каждому конечному множеству $\mathcal{K}$, элементами которого являются $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантные подалгебры $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} < \mathfrak{g}$, компактный (невыпуклый) полиэдр $/\mathcal{K}/$, содержащийся в $\mathtt{W} \simeq W^{\Sigma}$. Для этого упорядочим $\mathcal{K}$ по включению подалгебр и обозначим (как обычно) через $\Delta(\mathcal{K})$ множество вполне упорядоченных подмножеств φ из $\mathcal{K}$, т.е. флагов подалгебр из $\mathcal{K}$. Утверждается, что

$$/\varphi/ \cap /\psi/ = /\varphi \cap \psi/, \qquad \forall\, \varphi, \psi \in \Delta(\mathcal{K}) \tag{5.1}$$

(см. [Во, предложение 6.4] или ниже, формулу (5.2)). (Для проверки можно представить каждый симметрический оператор с неотрицательным спектром $(\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n)$, где $\lambda_n = 0$, в виде суммы $A = \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1})(1_{\mathfrak{g}} - 1_{F_{\lambda_{i+1}}})$. Очевидно, это представление однозначно.) Подмножества $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$ можно рассматривать как симплексы абстрактного симплициального комплекса, обозначаемого снова через $\Delta(\mathcal{K})$. Тогда, в силу (5.1),

> *прямолинейные симплексы $/\varphi/$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$, образуют геометрическую реализацию порядкового комплекса* $\Delta(\mathcal{K})$, т.е. компактный полиэдр $/\mathcal{K}/ := \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K})} /\varphi/$.

Легко проверить, что полиэдр $/\mathcal{K}/$ содержится в несферической модели $\mathtt{W}$ пространства W^{Σ}, т.е. все его точки – это фильтрующие неотрицательные симметрические $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантные линейные операторы со следом 1 на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, вырожденные относительно подалгебры $\mathfrak{h}$.

Полиэдр $/\mathcal{K}/$ называется **допустимым,** если конечное множество $\mathcal{K} \cup (\mathfrak{g})$ является **верхней полурешеткой** подалгебр, т.е. вместе с любыми подалгебрами $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ содержит и наименьшую содержащую их подалгебру $\mathfrak{f} = \sup(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$.

Первая теорема о ретракции. Ретракция на допустимый полиэдр. Пусть $\mathcal{K} \ni \mathfrak{g}$ – конечная верхняя полурешетка $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантных подалгебр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{g}$, и пусть $\mathcal{K}^{\#} := \mathcal{K} \setminus (\mathfrak{g})$.

Теорема 5.1. *Допустимый полиэдр $/\mathcal{K}^{\#}/$ является строгим деформационным ретрактом компактного топологического пространства* $\mathtt{X}[\mathcal{K}] := \bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}^{\#}} \mathtt{X}[\mathfrak{k}]$.

Теорема является естественным обобщением [Bo, теорема 6.10]. Следующая теорема является ее грубой эскизной версией:

Теорема 5.2. *Допустимый полиэдр $/\mathcal{K}^{\#}/$ является строгим деформационным ретрактом компактного топологического пространства* $\mathtt{D}[\mathcal{K}] := \bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}^{\#}} \mathtt{D}[\mathfrak{k}]$.

Обе теоремы справедливы в полуалгебраической категории. Далее приводится схема доказательства, которое является просто новой редакцией доказательства [Bo, теорема 6.10] (при заметных внешних отличиях).

Для доказательства К.Бем использовал покрытие пространства $\mathtt{X}[\mathcal{K}]$ компактными подмножествами, промежуточными между симплексами $/\varphi/$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{K}^{\#})$ и членами $\mathtt{X}[\mathfrak{k}]$ исходного покрытия. Он наметил полезную алгебро-топологическую конструкцию, найдя пересечения некоторых из них. Мы объединим эти объекты и симплексы под общим названием **бабочек** и положим в основу изложения. Окончательная алгебраическая формула для пересечения бабочек, отсутствующая у Бема, приводится ниже.

Описание бабочек. Бабочки являются компактными полуалгебраическими подмножествами соответственно топологического пространства $\mathtt{W} \simeq W^{\Sigma}$ и его грубой эскизной версии $\mathtt{W}_{\mathtt{draft}}$.

1) Бабочка 1 вида определяется равенством $\mathtt{B}[\mathfrak{f}] = \mathtt{X}[\mathfrak{f}]$ или, соответственно, $\mathtt{B}[\mathfrak{f}] = \mathtt{D}[\mathfrak{f}]$, для каждой $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантной подалгебры $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{f} < \mathfrak{g}$; кроме того, $\mathtt{B}[\mathfrak{g}] := \varnothing$.

Вообще, бабочки сопоставляются флагам $\varphi = (\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r)$ $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантных подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} \geqslant \mathfrak{f}_i > \mathfrak{f}_{i+1} > \mathfrak{h}$, $r \geqslant 1$. Случай $r = 1$ уже рассмотрен.

2) При $r > 1$, $\mathfrak{g} \in \varphi$ бабочка определяется как $r-2$-мерный прямолинейный симплекс $/\varphi \setminus \mathfrak{g}/ = \operatorname{Convex\,hull}\{\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i} : i = 2, \ldots, r\}$.

3) При $r > 1$, $\mathfrak{g} \notin \varphi$ бабочка определяется как объединение всех отрезков евклидова пространства с левым концом в точке бабочки $\mathtt{B}[\mathfrak{f}_1]$ и правым концом в точке $r-2$-мерного симплекса $/\varphi \setminus \mathfrak{f}_1/ = \operatorname{Convex\,hull}\{\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i} : i = 2, \ldots, r\}$. Утверждается, что эти отрезки могут пересекаться только на концах, т.е. выполняется следующая лемма:

Лемма 5.3. *Бабочка 3-го вида является джойном $X * Y$ двух бабочек 1-го и 2-го видов $X = \mathtt{B}[\mathfrak{f}_1]$ и $Y = /\varphi \setminus \mathfrak{f}_1/$.*

Бабочка флага φ обозначается через $\mathtt{B}[\varphi] = \mathtt{X}[\varphi]$ или $\mathtt{D}[\varphi]$ соответственно, в зависимости от версии. Используя лемму 5.3, находим, что в грубой

эскизной версии каждая бабочка $\mathtt{D}[\varphi]$ гомеоморфна $r+k-1$-мерному шару, где $k = \dim \mathtt{D}[\mathfrak{f}_1] \geqslant -1$.

Алгебраическая формула для пересечения бабочек. Как можно доказать,

$$\mathtt{B}[\varphi_1] \cap \mathtt{B}[\varphi_2] = \mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2], \tag{5.2}$$

пересечение бабочек $\mathtt{B}[\varphi_1]$ и $\mathtt{B}[\varphi_2]$ является снова бабочкой $\mathtt{B}[\varphi]$ некоторого флага $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, для которого будет написана формула. При этом φ — наименьшая общая верхняя грань флагов φ_i, $i = 1, 2$ относительно нестандартного отношения частичного порядка на множестве флагов : $\psi > \varphi$, если существует последовательность флагов $\psi = \varphi_1, \ldots, \varphi_k = \varphi$ такая, что наибольшие подалгебры $\max(\varphi_i)$ образуют невозрастающую последовательность, $\max(\varphi_i) \geqslant \max(\varphi_{i+1})$, длины соседних флагов различаются на ± 1, $|\ell(\varphi_i) - \ell(\varphi_{i+1})| = 1$, и для каждого $i < k$ или $\varphi_{i+1} \subset \varphi_i$, $\max(\varphi_i) > \max(\varphi_{i+1})$, или $\varphi_{i+1} \supset \varphi_i$, $\max(\varphi_i) = \max(\varphi_{i+1})$. ($\psi \subset \varphi$ пишется, если каждая подалгебра из последовательности ψ входит в последовательность φ.)

Короче говоря, $\psi \geqslant \varphi$, если и только если выполняются следующие условия:

$$\max(\psi) \geqslant \max(\varphi); \qquad \text{из } \mathfrak{l} \in \psi,\ \mathfrak{l} \notin \varphi \text{ следует } \mathfrak{l} > \max(\varphi).$$

Предложение 5.4. *Пересечение любых бабочек* $\mathtt{B}[\varphi]$ *и* $\mathtt{B}[\psi]$ *снова является бабочкой. Именно* $\mathtt{B}[\varphi] \cap \mathtt{B}[\psi] = \mathtt{B}[\varphi\psi]$, *где* $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi$ *— следующая композиция вполне упорядоченных подмножеств решетки всех* $\mathcal{A}$*-инвариантных подалгебр:*

$$\varphi\psi := (\psi \cap \varphi) \cup \{\mathfrak{f} \in \varphi : \mathfrak{f} > \max\psi\} \cup \{\mathfrak{f} \in \psi : \mathfrak{f} > \max\varphi\} \cup \{\sup(\varphi \cup \psi)\};$$

$\cap$ *и* $\cup$ *— теоретико-множественные операции объединения и пересечения.*

Например, о двух бабочках 1-го вида утверждается, что $\mathtt{B}[\mathfrak{f}] \cap \mathtt{B}[\mathfrak{l}] = \mathtt{B}[\sup(\mathfrak{f}, \mathfrak{l})]$, ср. (4.1) и (4.2).

Доказательство. Из $\psi \geqslant \varphi$ легко следует $\mathtt{B}[\psi] \subset \mathtt{B}[\varphi]$, значит, $\mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2] \subset \mathtt{B}[\varphi_i]$, $i = 1, 2$. Пусть теперь $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_i \neq (\mathfrak{g})$. Докажем включение $\mathtt{B}[\varphi_1] \cap \mathtt{B}[\varphi_2] \subset \mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2]$ индукцией по $\lambda = \ell(\varphi_1) + \ell(\varphi_2)$, где $\ell(\varphi)$ — длина каждого флага φ. Вначале рассмотрим следующие случаи:

1) $\lambda = 2$, т.е. $\ell(\varphi_1) = \ell(\varphi_2) = 1$: тогда утверждение легко сводится к определению бабочек 1-го вида;

2) $\ell(\varphi_2) = 1$, $\ell(\varphi_1) > 1$, $\varphi_2 = (\mathfrak{f})$, $\min(\varphi_1) \geqslant \mathfrak{f}$: тогда $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1$, т.е. $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$, и утверждение очевидно; аналогичный случай, где $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$;

3) $\ell(\varphi_1) > 1$, $\ell(\varphi_2) > 1$, $\mathfrak{f} := \min(\varphi_1) = \min(\varphi_2)$: тогда $\varphi_i = (\psi_i, \mathfrak{f})$, $i = 1, 2$, откуда $\varphi_1\varphi_2 = (\psi_1\psi_2, \mathfrak{f})$; бабочки $\mathtt{B}[\psi_i]$, $i = 1, 2$ лежат на граничной сфере $\mathtt{S}[\mathfrak{f}]$ шара $\mathtt{D}[\mathfrak{f}]$ ($\mathtt{S}[\mathfrak{f}] \neq \varnothing$ в силу $\psi_1 \neq \psi_2$), а точку $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}} \in \mathtt{D}^*[\mathfrak{f}] = \mathtt{D}[\mathfrak{f}] \setminus \mathtt{S}[\mathfrak{f}]$ можно принять за центр этого шара, ср. (4.3), поэтому из индуктивного

предположения следует:

$$\mathtt{B}[\varphi_1] \cap \mathtt{B}[\varphi_2] = (\mathtt{B}[\psi_1] * \overline{\chi}^{\mathfrak{f}}) \cap (\mathtt{B}[\psi_2] * \overline{\chi}^{\mathfrak{f}}) = \mathtt{B}[\psi_1\psi_2] * \overline{\chi}^{\mathfrak{f}} = \mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2].$$

(Здесь $\mathtt{B} * a$ — конус с вершиной a и основанием $\mathtt{B}$, и по определению $\mathtt{B}[\mathfrak{g}] * \overline{\chi}^{\mathfrak{f}} = \varnothing * \overline{\chi}^{\mathfrak{f}} = \overline{\chi}^{\mathfrak{f}}$.) В остальных случаях для каждого $A \in \mathtt{B}[\varphi_1] \cap \mathtt{B}[\varphi_2]$ с точностью до перестановки φ_1 и φ_2 существует подфлаг $\psi \subset \varphi_1$, $\psi > \varphi_1$, такой, что $A \in \mathtt{B}[\psi]$. Тогда $\ell(\psi) < \ell(\varphi_1)$ и по предположению индукции $A \in \mathtt{B}[\psi\varphi_2] \subset \mathtt{B}[\varphi_1\varphi_2]$. □

Правило пересечения бабочек $\mathtt{X}[\varphi]$ и $\mathtt{X}[\psi]$ было получено К.Бемом при некоторых ограничениях на флаги φ и ψ. См. [Bo, §5.4] и [Bo, предложение 6.4] (бабочки 1 и 2 видов) и [Bo, лемма 6.9] (бабочки 3 вида).

Схема доказательства первой теоремы. Наметим доказательство аналогичных теорем 5.1 и 5.2. Мы хотим доказать существование последовательности п.а. строгих деформационных ретракций (где п.а. указывает на полуалгебраическую категорию):

$$\rho^{(s)} : X^{(s-1)} \xrightarrow{\text{на}} X^{(s)}, \qquad s = 1, \dots, m$$

с $X^{(0)} = \mathtt{B}[\mathcal{K}]$ и $X^{(m)} = /\mathcal{K}^{\#}/$. Пусть $h(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{g}) - |\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}|^{-2}$ для каждой подалгебры $\mathfrak{k} \in \mathcal{K}$. Вместо этого можно фиксировать любую строго возрастающую функцию $h : \mathcal{K} \to \{1, 2, \dots\}$, т.е. такую, что из $\mathfrak{f} < \mathfrak{l}$ следует $h(\mathfrak{f}) < h(\mathfrak{l})$. Продолжим монотонную функцию h с $\mathcal{K}$ на $\Delta(\mathcal{K})$, полагая $h(\varphi) := h(\max(\varphi))$, для каждого флага $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$ (это дает $h(\varphi) \leqslant h(\psi)$ при $\varphi < \psi$) и положим по определению

$$X^{(s)} = \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K}) : h(\varphi) > s} \mathtt{B}[\varphi], \qquad s \in \{0, 1, \dots\}.$$

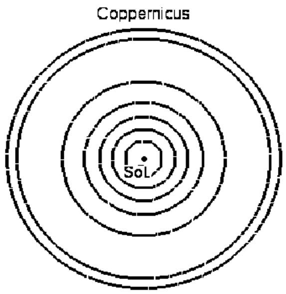
Тогда $X^{(0)} = \mathtt{B}[\mathcal{K}]$, а при $m = h(\mathfrak{g}) - 1$ выполняется

$$X^{(m)} = /\mathcal{K}^{\#}/ \quad := \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K}) : \max(\varphi) = \mathfrak{g}} \mathtt{B}[\varphi].$$

Заметим, что бабочки $\mathtt{B}[\varphi]$ а тогда, в силу конечности $\Delta(\mathcal{K})$, их объединения и пересечения, являются компактными п.а. множествами. Из формулы пересечения бабочек следует, что для каждого флага $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$ выполняется

$$\mathtt{T}[\varphi] := \mathtt{B}[\varphi] \cap X^{(h(\varphi))} = \bigcup_{\psi \in \Delta(\mathcal{K}) : \psi > \varphi,\, h(\psi) > h(\varphi)} \mathtt{B}[\psi].$$

Утверждается, что бабочка $\mathtt{B}[\varphi]$ каждого флага φ стягивается по себе на свое 'тельце' $\mathtt{T}[\varphi]$ (т.е. тельце является ее п.а. строгим деформационным ретрактом). Для флага $\varphi = (\mathfrak{f})$ длины 1 это, с точностью до обозначений, утверждение нашей прежней леммы 4.6 о ретракции. Общий случай можно легко свести к этому частному. В результате бабочка $\mathtt{B}[\varphi] \subset X^{(s-1)}$ с $h(\varphi) = s$ стянута на свое пересечение с $X^{(s)}$. Развивая это рассуждение, можно получить искомую ретракцию $X^{(s-1)}$ на $X^{(s)}$.



Точки $\overline{\chi}^{\mathfrak{k}}$ принадлежат конечному набору евклидовых сфер с центром $\overline{\chi}^{\mathfrak{h}}$ (Солнце) и $h(\mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{k})$ увеличивается вместе с радиусом сферы. Бабочки 1-го вида лежат на соответствующих касательных плоскостях, так что вся вселенная помещается в шаре радиусом 1 и объединение бабочек 1-го вида с $h > s$ содержится в шаровом кольце.

Рис. 2. «Вселенная Коперника» (к фильтрации $X^{(s)}$)

Вместо этого можно непосредственно применить к паре пространств $X^{(s)} \subset X^{(s-1)}$ нашу лемму 4.5 о δ-окрестности. Отображение $f : X^{(s-1)} \times [0,1] \to X^{(s-1)}$, удовлетворяющее условиям леммы, можно построить достаточно явно, и даже не только в случае конечной, но и в случае *компактной* полурешетки $\mathcal{K}$.

Построение $f : X^{(s-1)} \times [0,1] \to X^{(s-1)}$ и окончание доказательства. Обозначим через γ_φ естественную (ортогональную) проекцию каждой бабочки $\mathtt{B}[\varphi]$ на подстилающий симплекс $\mathtt{B}[\varphi \cup (\mathfrak{g})] \subset \mathtt{B}[\varphi]$. А именно, пусть $\varphi = (\mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_r)$ — флаг подалгебр длины $r \geqslant 1$. При $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}$ положим $\gamma_\varphi = \mathrm{id}$. При $\mathfrak{f}_1 \neq \mathfrak{g}$ каждый элемент $x \in \mathtt{B}[\varphi]$ допускает единственное представление

$$x = \lambda_1 z + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}; \quad z \in \mathtt{B}[\mathfrak{f}_1]; \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

и $\gamma_\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}$. Теперь зафиксируем функцию $\sigma : X^{(s-1)} \to [0,1]$, удовлетворяющую условию $\sigma(x) = 0$ для каждого $x \in X^{(s)}$. Тогда можно определить отображение $f_{t,\varphi} : \mathtt{B}[\varphi] \to \mathtt{B}[\varphi]$ равенством

$$f_{t,\varphi}(x) = (1 - \sigma(x)t)x + \sigma(x)t\gamma_\varphi(x). \qquad \forall\, x \in \mathtt{B}[\varphi]. \tag{5.3}$$

Утвержается, что для каждого $t \in [0,1]$ существует (разрывное) отображение

$$f_t = \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K}) : h(\varphi) \geqslant s} f_{t,\varphi} \quad : \quad X^{(s-1)} \to X^{(s-1)},$$

и притом даже в случае бесконечной $\mathcal{K}$. Для проверки надо лишь убедиться в том, что точка $\gamma_\varphi(x)$ не зависит от флага φ при $\sigma(x) \neq 0$, т.е. при $x \in X^{(s-1)} \setminus X^{(s)}$.

Для каждого $x \in X^{(0)}$ обозначим через ψ_x наибольший флаг $\psi \in \Delta(\mathcal{K})$, удовлетворяющий условию $x \in \mathtt{B}[\psi]$. Мы пользуемся нестандартным отношением порядка на множестве флагов, определенным выше. Существование ψ_x следует из свойства обрыва возрастающих цепочек

для ч.у. множества $\Delta(\mathcal{K})$. По формуле пересечения бабочек, $\mathtt{B}[\psi_x]$ является наименьшей бабочкой $\mathtt{B}[\varphi]$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$, содержащей x. Введем обозначения

$$\gamma(x) = \gamma_{\psi_x}(x), \quad h(x) = h(\psi_x) = \max\{k : x \in X^{(k+1)}\}.$$

Из условий $\psi_x \geqslant \varphi$ и $h(\psi_x) = h(\varphi) = s$ следует $\psi_x \subset \varphi$ (т.е. каждая подалгебра флага ψ_x содержится в флаге φ) и $\mathfrak{f}_1 = \max(\varphi) = \max(\psi_x)$, а это влечет $\gamma_\varphi(x) = \gamma(x)$. Поэтому

$$h(x) = s \implies \gamma_\varphi(x) = \gamma(x), \quad \forall\, \varphi,\, x \in \mathtt{B}[\varphi],\, h(\varphi) = s. \tag{5.4}$$

Формула (5.4) доказывает существование отображения $f_t : X^{(s-1)} \to X^{(s-1)}$ (априори не полуалгебраического и разрывного). При этом $f_0 : X^{(s-1)} \to X^{(s-1)}$ и сужение f_t на $X^{(s)}$, $t \in [0,1]$ будут тождественными отображениями.

Перейдем к определению функции $\sigma(x)$, $x \in X^{(s-1)}$. Зададим ее равенством:

$$\sigma(x) := \min(1,\, \delta^{-1} d(\widetilde{x}, Z)). \tag{5.5}$$

Обозначения, использованные в определении (5.5): $\widetilde{x} = (x, \gamma(x))$ и Z — множество всех пар (x', y'), где $x' \in X^{(s)}$, $y' = \gamma_\varphi(x')$ для некоторого флага $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$ такого, что $h(\varphi) \in \{s, s+1, \ldots\}$, $x \in \mathtt{B}[\varphi]$; расстояние между парами (x, y) и (x', y') определяется как максимум евклидовых расстояний $d(x, x')$ и $d(y, y')$, т.е.

$$d((x,y),(x',y')) = \max(d(x,x'), d(y,y')),$$

а расстояние от $\widetilde{x} = (x, \gamma(x))$ до множества Z определяется естественным образом.

При $x \in X^{(s)}$ (т.е. при $h(x) > s$) имеем $\widetilde{x} \in Z$, и тогда $\sigma(x) = 0$.

Теперь можно записать для f_t окончательную формулу:

$$f_t(x) = (1 - \sigma(x)t)x + \sigma(x)t\gamma(x), \qquad \forall x \in X^{(s-1)} \quad (t \in [0,1]). \tag{5.6}$$

Покажем, что при $t = 1$ функция $g = f_1$ удовлетворяет условию

$$d(g(x), X^{(s)}) < \delta, \qquad \forall\, x \in X^{(s-1)}. \tag{5.7}$$

Воспользуемся тем, что расстояние Хаусдорфа между отрезками евклидова пространства удовлетворяет неравенству

$$d^H([x,y],[x',y']) \leqslant \max(d(x,x'), d(y,y')).$$

(В сферической геометрии Римана это, очевидно, не всегда так, поэтому при работе со сферической моделью Бема нам понадобились бы дополнительные соображения!) По определению, $g(x)$ лежит на отрезке $[x, \gamma(x)]$. С другой стороны, если $x' \in X^{(s)}$ и $x' \in \mathtt{B}[\varphi]$, то и отрезок $[x', \gamma_\varphi(x')]$ содержится в $X^{(s)}$. Следовательно, имеем

$$\sigma(x) < 1 \implies d(g(x), X^{(s)}) \leqslant d(\widetilde{x},\, Z) < \delta,$$

$$\sigma(x) = 1 \implies g(x) = \gamma(x) \in X^{(m)} \subset X^{(s)}.$$

Для завершения доказательства теорем 5.1 и 5.2 осталось проверить непрерывность и полуалгебраичность отображения (5.6) и воспользоваться леммой 4.5 о δ-окрестности (при $X = X^{(s-1)}$, $T = X^{(s)}$). Если (как легко убедиться) эти свойства выполняются для сужения (5.6) на каждое подпространство $\mathtt{B}[\varphi] \times [0,1]$, для каждого флага $\varphi \in \Delta(\mathcal{K})$, то в силу конечности $\mathcal{K}$ они выполняются и для (5.6).

Более того, справедливо следующее обобщение.

Предложение 5.5. *Пусть фиксированная ранее полурешетка $\mathcal{K} \ni \mathfrak{g}$ некоторых подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представляет собой компактное, но теперь не обязательно конечное, п.а. подмножество (несвязного) грассманиана векторных подпространств пространства $\mathfrak{g}$, а строго возрастающая функция $h : \mathcal{K} \to \{1, 2, \dots\}$ — непрерывна, например, $h(\mathfrak{k}) =$* $\dim(\mathfrak{k})$. *Определим пространства $X^{(s)}$ через $\mathcal{K}$ и h, как выше. Тогда*

1) *все $X^{(s)}$, $s = 0, \dots, m$, также суть компактные п.а. множества;*
2) *равенство* (5.6) *определяет непрерывное п.а. отображение $f : X^{(s-1)} \times [0,1] \to X^{(s-1)}$, для каждого $s \in \{1, \dots, m\}$;*
3) *каждое $X^{(s)}$, $s \in \{1, \dots, m\}$ является п.а. строгим деформационным ретрактом пространства $X^{(s-1)}$.*

Доказательство предложения. 1) По условию, $\Delta(\mathcal{K})$ содержится в несвязном многообразии флагов $F = \bigcup_{r>0} \bigcup_{\dim(\mathfrak{g}) \geqslant k_1 > \ldots > k_r} F_{k_1,\ldots,k_r}(\mathfrak{g})$ и является компактным п.а. подмножеством. Рассмотрим теперь множества пар

$$Y = \{(x, \varphi) : \varphi \in \Delta(\mathcal{K}), x \in \mathtt{B}[\varphi]\}, \qquad Y^{(s)} = \{(x, \varphi) \in Y : h(\varphi) \geqslant s + 1\},$$

где $s = 1, \dots, m$. Тогда $X^{(s)} = pY^{(s)}$, где $p(x, \varphi) = x$. Манипулируя естественными векторными расслоениями над $F_{k_1,\ldots,k_r}(\mathfrak{g})$, нетрудно доказать компактность и полуалгебраичность $Y = \bigcup\bigcup Y_{k_1,\ldots,k_r}$. (В $\mathtt{X}$-версии для этого используется также наша основная лемма 4.1 о компактности и полуалгебраичности множества $\mathfrak{F}_+$ фильтрующих неотрицательных симметрических операторов со следом 1 на $\mathfrak{g}$.) Далее, $Y^{(s)}$ есть объединение связных компонент пространства Y. Следовательно, $Y^{(s)}$, а тогда, по теореме Тарского-Сейденберга, и $X^{(s)} = pY^{(s)}$, опять компактны и полуалгебраичны.

2) Проверим второе утверждение. Прежде всего, рассмотрим $\gamma_\varphi : \mathtt{B}[\varphi] \to \mathtt{B}[\varphi \cup (\mathfrak{g})]$. Напомним, что это по определению ортогональная проекция, и $\gamma_\varphi(x)$ — это ближайшая к $x \in \mathtt{B}[\varphi]$ точка симплекса $\mathtt{B}[\varphi \cup (\mathfrak{g})]$. Следовательно, $(x, \varphi) \in Y^{(s-1)} \mapsto \gamma_\varphi(x)$ является непрерывным п.а. отображением. Тогда $Z = \{(x, \gamma_\varphi(x)) : (x, \varphi) \in Y^{(s-1)}, x \in X^{(s)}\}$ является п.а. множеством (ибо таковы $Y^{(s-1)}$ и $X^{(s-1)}$) и

$$\varsigma(x, \varphi) := \min(1,\ \delta^{-1} d((x, \gamma_\varphi(x)),\ Z))$$

непрерывной п.а. функцией аргумента $(x,\varphi) \in Y^{(s-1)}$ (ср. [a, Prop. 2.2.8])). В силу (5.4) и (5.5) выполняется $p^*\sigma = \varsigma$ и существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Y^{(s-1)} \times [0,1] & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y^{(s-1)} \\ {\scriptstyle q = p\times \mathrm{id}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X^{(s-1)} \times [0,1] & \xrightarrow{f} & X^{(s-1)} \end{array}$$

где верхняя и нижняя горизонтальные стрелки $\widetilde{f}$ и f определяются соответственно из (5.3) и (5.6), причем $\widetilde{f}$ является непрерывным п.а. отображением компактных пространств. Теперь из коммутативной диаграммы находим, что нижняя стрелка f тоже непрерывна. Кроме того, график отображения f является проекцией графика отображения $\widetilde{f}$, т.е., $\{(a, f(a))\} = \{(qb, f(qb))\} = \{(qb, p\widetilde{f}(b))\}$. По теореме Тарского-Сейденберга f имеет п.а. график. Значит, f является непрерывным полуалгебраическим отображением.

3) Сужение f на $X^{(s-1)} \times 0 \cup X^{(s)} \times [0,1]$ будет тождественным отображением, ибо $\sigma|X^{(s)} = 0$. Согласно (5.7) для всех $x \in X^{(s-1)}$ имеем $d(f(x,1), X^{(s)}) < \delta$. Тогда третье утверждение следует из леммы 4.5 о δ-окрестности. Предложение доказано. $\square$

§ 6. Пространство X_ε и его ретракты

6.1. **Вторая теорема о ретракции.** Понятие бабочки подсказало более сильный вариант другой теоремы К.Бема о ретракции (см. [Bo, теорема 5.48, следствие 5.49]) и позволило тривиализовать ее доказательство. Сформулируем естественное обобщение этой теоремы, в котором используются компактные объединения бабочек и стандартное понятие порядкового идеала.

Обозначим через $\mathcal{I}$ верхнюю полурешетку всех $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантный подалгебр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{g}$. Порядковым идеалом в $\mathcal{I}$ называется любое подмножество $\mathcal{J}$, удовлетворяющее условию: из $\mathfrak{l} \leqslant \mathfrak{j}$, $\mathfrak{l} \in \mathcal{I}$, $\mathfrak{j} \in \mathcal{J}$ следует $\mathfrak{l} \in \mathcal{J}$. Порядковый идеал $\mathcal{J}$ в $\mathcal{I}$, $\mathfrak{g} \notin \mathcal{J}$, будем называть **допустимым,** если $\mathcal{J}$ и его дополнение $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ будут компактными полуалгебраическими подмножествами (несвязного) многообразия векторных подпространств алгебры $\mathfrak{g}$. (Например, т.н. **торальные подалгебры** $\mathfrak{j}$ рассматриваемой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. подалгебры $\mathfrak{j} \in \mathcal{I}$ с коммутантами, лежащими в $\mathfrak{h}$, $[\mathfrak{j},\mathfrak{j}] \leqslant \mathfrak{h}$, образуют допустимый порядковый идеал при $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \not\leqslant \mathfrak{h}$.)

Фиксируем допустимый порядковый идеал $\mathcal{J}$ в $\mathcal{I}$, и положим

$$\mathbb{I} := \{\varphi \in \Delta(\mathcal{I}) \setminus \Delta(\mathcal{J}) : \varphi \setminus (\max(\varphi)) \subset \mathcal{J}\},$$
$$\mathbb{J} := \{\varphi \in \Delta(\mathcal{I}) \setminus \Delta(\mathcal{J}) : \varphi \setminus (\mathfrak{g}) \subset \mathcal{J}\} = \{\varphi \in \mathbb{I} : \mathfrak{g} \in \varphi\}.$$

Пусть $\mathtt{B}[\mathfrak{I}] := \bigcup_{\mathfrak{f}\in\mathfrak{I}} \mathtt{B}[\mathfrak{f}], \ldots, \mathtt{B}[\mathbb{J}] := \bigcup_{\varphi\in\mathbb{J}} \mathtt{B}[\varphi]$. Можно показать, что каждое из множеств $\mathtt{B}[\mathfrak{I}]$, $\mathtt{B}[\mathfrak{J}]$, $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$, $\mathtt{B}[\mathbb{I}]$, $\mathtt{B}[\mathbb{J}]$ является полуалгебраическим и компактным.

Теорема 6.1. *Топологическое пространство* $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}] = \bigcup_{\mathfrak{f}\in\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}} \mathtt{B}[\mathfrak{f}]$ *является строгим деформационным ретрактом дополнения* $\mathtt{B}[\mathbb{I}]\setminus\mathtt{B}[\mathbb{J}]$.

Теорема формулирована сразу и для грубой и для тонкой версий (т.е. $\mathtt{B} = \mathtt{D}$ или $\mathtt{X}$) и справедлива также в полуалгебраической категории.

Поясним ее геометрический смысл. Подпространства $\mathtt{B}[\mathbb{J}]$ и $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$ не пересекаются. Первое из них является объединением прямолинейных симплексов $\mathtt{B}[\varphi] = /\varphi \searrow \mathfrak{g}/$, где $\varphi\in\mathbb{J}$. Дополнение этих двух подпространств в $\mathtt{B}[\mathbb{I}]$ немного напоминает линейную конгруэнцию, поскольку $\mathtt{B}[\mathbb{I}] \setminus (\mathtt{B}[\mathbb{J}] \cup \mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}])$ – это объединение попарно непересекающихся интервалов евклидова пространства, соединяющих точки подпространства $\mathtt{B}[\mathbb{J}]$ с точками подпространства $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$ (по некоторому правилу). Интервалы можно одновременно стянуть в их концы, принадлежащие подпространству $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$. Это дает строгую деформационную ретракцию $\mathtt{B}[\mathbb{I}]\setminus\mathtt{B}[\mathbb{J}]$ на $\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$.

Детализируем это описание, а потом докажем теорему 6.1. Согласно лемме 5.3 для каждого флага $\varphi\in\mathbb{I}$ существует естественное вложение $\iota = \iota_\varphi : \mathtt{B}[\varphi] \subset Y * X$ бабочки $\mathtt{B}[\varphi]$ в джойн топологических пространств $X = \mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$ и $Y = \mathtt{B}[\mathbb{J}]$. Для каждого $A\in\mathtt{B}[\varphi]$ пусть $\iota(A) = (A_1, \kappa, A_2)$, где $A_1\in Y$, $\kappa\in[0,1]$, $A_2\in X$. Тогда $A = \jmath(A_1,\kappa,A_2) = (1-\kappa)A_1 + \kappa A_2$.

Предложение 6.2. *Подмножество* $Z = \bigcup_{\varphi\in\mathbb{I}} \iota(\mathtt{B}[\varphi])$ *джойна* $Y * X = \mathtt{B}[\mathbb{J}] * \mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$ *задается следующей системой уравнений* (*) *относительно* $A_1\in Y$ *и* $A_2\in X$:

$$A_1A_2 = A_2A_1 = \lambda_1 A_2, \qquad \text{где } \lambda_1 = \max\nolimits_{|V|=1} Q(V, A_1V);$$
$$A_1[V, A_2V] = \lambda_1[V, A_2V], \quad \text{для каждого вектора } V\in\mathfrak{g}.$$

Тогда Z *компактно. Отображение* $\jmath : Y * X \ni (A_1,\kappa,A_2) \mapsto A = (1-\kappa)A_1 + \kappa A_2$ *определяет гомеоморфизм* Z *на* $\mathtt{B}[\mathbb{I}] = \bigcup_{\varphi\in\mathbb{I}} \mathtt{B}[\varphi]$.

(В $\mathtt{X}$-версии вторая подсистема уравнений следует из первой.)

Доказательство. Докажем, что Z определяется системой (*). Сначала преобразуем ее. Это, строго говоря, система однородных уравнений относительно $(1-\kappa)A_1$ и κA_2, которая при $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$ становится тривиальной. Фиксируем $\kappa \in]0,1[$. По любому $A_1\in\mathtt{B}[\mathbb{J}]$ однозначно восстанавливается флаг подалгебр $\psi = (\mathfrak{g} > \mathfrak{j}_1 > \ldots > \mathfrak{j}_r)$, $\mathfrak{j}_i\in\mathfrak{J}$, $r\geqslant 1$, такой, что $A_1 = \sum s_i \overline{\chi}^{\mathfrak{j}_i}$, $\sum s_i = 1$, $s_i > 0$ для всех i (т.е. A_1 принадлежит бабочке 2 вида $\mathtt{B}[\psi]$, симплексу, и притом внутренности симплекса). Далее, по $A_2\in\mathtt{B}[\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}]$ строится $\mathfrak{k} = \{V\in\mathfrak{g} : Q(V, A_2V') = Q(V, [V', A_2V']) = 0, \forall V'\in\mathfrak{g}\}$. Из (4.1) и (4.2) легко следует, что $\mathfrak{k}$ — это наибольшая из подалгебр $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$ таких, что $A_2\in\mathtt{B}[\mathfrak{f}]$ (отсюда $\mathfrak{k}\in\mathfrak{I}\setminus\mathfrak{J}$). Система (*) для (A_1,κ,A_2) эквивалентна условию $\mathfrak{k} > \mathfrak{j}_1$.

Пусть $(A_1, \kappa, A_2) = \iota_\varphi(A) \in Z$ для некоторого флага $\varphi = (\mathfrak{f}_0 > \mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_m) \in \mathbb{I}$. Тогда $A_2 \in \mathtt{B}[\mathfrak{f}_0]$ и $\mathfrak{f}_0 \leqslant \mathfrak{k}$. Кроме того, $\mathtt{B}[\psi]$ будет гранью симплекса $\mathtt{B}[\mathfrak{g} > \mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_m] \ni A_1$, и $\mathfrak{j}_1 \leqslant \mathfrak{f}_1$. Следовательно, $\mathfrak{j}_1 < \mathfrak{k}$. Обратно, пусть $\mathfrak{k} > \mathfrak{j}_1$. Тогда существует флаг $\varphi_0 = (\mathfrak{k} > \mathfrak{j}_1 > \ldots > \mathfrak{j}_r) \in \mathbb{I}$; ясно, что $A \in \mathtt{B}[\varphi_0]$ и $(A_1, \kappa, A_2) = \iota_{\varphi_0}(A) \in Z$.

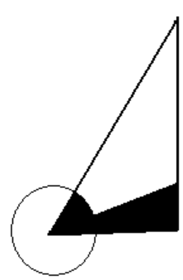
Докажем остальные утверждения. Очевидно, $(1-\kappa)\lambda_1$ является непрерывной п.а. функцией оператора $(1-\kappa)A_1$ (это его наибольшее собственное значение). Поэтому система (*) непрерывна. Тогда Z компактно в силу компактности X и Y. Проверим обратимость $\jmath|_Z$. Для любых флагов $\varphi, \psi \in \mathbb{I}$ из $\psi \geqslant \varphi$ следует $\iota_\psi = \iota_\varphi|_{\mathtt{B}[\psi]}$. Тогда по формуле (5.2) для пересечения бабочек $\iota_{\varphi_1}|_{\mathtt{B}[\varphi_1] \cap \mathtt{B}[\varphi_2]} = \iota_{\varphi_1\varphi_2}$, и существует отображение $\iota = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{I}} \iota_\varphi : \mathtt{B}[\mathbb{I}] \to Z$. Поэтому $\jmath|_Z$ обратимо и является гомеоморфизмом на $\mathtt{B}[\mathbb{I}]$. $\square$

Предложение 6.2 сохраняет смысл в п.а. категории. Оно также позволяет ввести естественную непрерывную п.а. функцию $\kappa : \mathtt{B}[\mathbb{I}] \to [0,1]$ такую, что $\mathtt{B}[\mathbb{J}] = \{A : \kappa(A) = 0\}$ и $\mathtt{B}[\mathfrak{I} \setminus \mathcal{J}] = \{A : \kappa(A) = 1\}$. Отсюда очевидным образом получается ретракция теоремы 6.1. Кроме того, выполняется следующее:

Предложение 6.3. *Пусть $0 < \varepsilon < 1$, а число L ограничивает сверху длины флагов из $\Delta(\mathcal{J})$. Тогда для каждого оператора $A \in \mathtt{B}[\mathbb{I}]$, удовлетворяющего условию*

$$\kappa(A) < \varepsilon^L$$

существуют флаг подалгебр $\varphi = (\mathfrak{f}(1) > \ldots > \mathfrak{f}(m)) \in \Delta(\mathcal{J})$ (длины $m > 0$) и оператор $B \in \mathtt{B}[\mathfrak{f}(1)]$ такие, что евклидово расстояние от B до $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}(1)}$ меньше ε, $|B - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}(1)}| < \varepsilon$ и A содержится в выпуклой оболочке σ набора операторов $\{B, \overline{\chi}^{\mathfrak{f}(s)}, 2 \leqslant s \leqslant m\}$. (Ясно, что σ — симплекс.)



К доказательству предложения 6.3

Доказательство. Пусть $A \in \mathtt{B}[\varphi]$ для некоторого флага $\varphi = (\mathfrak{f}_0 > \cdots > \mathfrak{f}_{r-1}) \in \mathbb{I}$. Если $\kappa(A) = 0$, то A содержится в симплексе, натянутом на все $\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}$, $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ и предложение выполняется. Пусть $0 < \kappa(A) < \varepsilon^L$. Тогда $\mathfrak{f}_0 \neq \mathfrak{g}$ (иначе $\kappa = 0$) и $r > 1$ (иначе $\kappa = 1$). Мы можем ввести последовательность чисел $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{r-1} = 1$ и последовательность симметрических операторов $B_i \in \mathtt{B}[\mathfrak{f}_i]$, $i = 0, \ldots, r-1$,

$B_i = a_i^{-1}\big(a_0 B_0 + \sum_{j=1}^{i}(a_j - a_{j-1})\,\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_j}\big)$, через которые оператор A выражается сразу r способами: $A = a_i B_i + \sum_{j=i+1}^{r-1}(a_j - a_{j-1})\,\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_j}$, $i = 0,\ldots,r-1$. Используя ортогональность набора $\{B_0 - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_0}, \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_j} - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_{j+1}}, j \geqslant 0\}$ и строгое неравенство $|B_0 - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}| < 1$, получаем $|B_i - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}|^2 = a_i^{-2}\big|a_0(B_0 - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_0}) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j\,(\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_j} - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_{j+1}})\big|^2 < (a_{i-1}/a_i)^2$ (для каждого i), откуда

$$\prod_{i=1}^{r-1}|B_i - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}| < \kappa(A) = a_0/a_{r-1}.$$

Поэтому $|B_i - \overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i}| < \varepsilon^{L/(r-1)} \leqslant \varepsilon$ хотя бы для одного $i \in \{1,\ldots,r-1\}$. $\square$

6.2. **Подходящее расширение X_ε пространства неторальных направлений.** Перейдем к определениям и выводам, основанным на теоремах 5.1, 5.2 и 6.1. Пусть $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \not\leqslant \mathfrak{h}$. Тогда, как уже отмечалось, торальные подалгебры $\mathfrak{j} \in \mathfrak{I}$ образуют допустимый порядковый идеал $\mathcal{J}$. В соответствии с [Bo], мы будем называть

$$\mathtt{B}[\mathfrak{I} \setminus \mathcal{J}] = \bigcup_{\mathfrak{f} \in \mathfrak{I}\setminus\mathcal{J}} \mathtt{B}[\mathfrak{f}]$$

пространством неторальных направлений. Как выше, $\mathtt{B} = \mathtt{D}$ или $\mathtt{X}$ (определение [Bo] относится только к случаю $\mathtt{B} = \mathtt{X}$).

Обратимся к определению расширенного пространства неторальных направлений X_ε, которое можно использовать вместо введенного в [Bo, теорема 5.48]. Расширенное пространство, допускающее строгую деформационную ретракцию сначала на $\mathtt{B}[\mathfrak{I} \setminus \mathcal{J}]$, а затем на полиэдр $/\mathcal{K}^{\#}/$, играет в работе К.Бема важную роль (как видно из доказательства основной теоремы в [Bo, §8]). Оригинальное построение расширения и его ретракции на пространство торальных направлений $\mathtt{B}[\mathfrak{I} \setminus \mathcal{J}]$ проводится по индукции и несколько запутано. В действительности, как видно из доказательства теоремы 6.1, расширение с нужными свойствами (описанными в [Bo, следствие 5.49]) и ретракцию можно получить за один шаг.

По теореме 6.1, топологическое пространство

$$\mathtt{B}[\mathbb{I}] \setminus \mathtt{B}[\mathbb{J}] = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{I}} \mathtt{B}[\varphi] \setminus \bigcup_{\mathfrak{g} \in \varphi \in \mathbb{I}} \mathtt{B}[\varphi]$$

содержит компактное подпространство X_ε, стягиваемое по себе на $\mathtt{B}[\mathfrak{I} \setminus \mathcal{J}]$. Предположим, что $\mathtt{B}[\mathbb{I}] \setminus X_\varepsilon$ содержится в достаточно малой окрестности компактного подпространства $\mathtt{B}[\mathbb{J}]$; этого заведомо можно добиться. Тогда X_ε удовлетворяет условиям из [Bo, следствие 5.49]. По этой причине X_ε можно использовать вместо расширения, введенного в [Bo, теорема 5.48]. Назовем такое подпространство X_ε **подходящим расширением пространства неторальных направлений**.

Из предыдущего предложения 6.3 следует, что при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ подходящим расширением будет

$$X_\varepsilon = \{A \in \mathtt{B}[\mathbb{I}] : \kappa(A) \geqslant \varepsilon^L\}. \tag{6.1}$$

Следствие 6.4. *Фиксируем* $\varepsilon \in]0,1[$. *Построенное* X_ε *компактно, полуалгебраично и пространство неторальных направлений* $X = \mathtt{B}[\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}]$ *является его п.а. строгим деформационным ретрактом. Значит,* X_ε *удовлетворяет условиям, перечисленным в* [Bo, теорема 5.48].

Для каждого $A \in \mathtt{W}$ *обозначим через* φ_A *наибольший из флагов* $\varphi \in \Delta(\mathcal{I})$, $A \in \mathtt{B}[\varphi]$. *Очевидно,* φ_A *существует и* $\mathtt{B}[\varphi_A]$ *— наименьшая бабочка, содержащая* A.

Пусть $Z = \{A : \varphi_A \in \Delta(\mathcal{J})$, *т.е.* φ_A *— флаг торальных подалгебр*$\}$, Y_ε *— объединение симплексов* σ *предыдущего предложения 6.3. Тогда*

$$\mathtt{W} = X_\varepsilon \cup Y_\varepsilon \cup Z. \tag{6.2}$$

Из (6.1) *и* (6.2) *вытекает, что* X_ε *— подходящее расширение пространства неторальных направлений при* $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2n(n-1)}$, *где* $n = \dim(G/H)$.

Следствие 6.4 относится к тонкой версии, $\mathtt{B} = \mathtt{X}$. С естественными изменениями оно верно и при $\mathtt{B} = \mathtt{D}$; первое утверждение не меняется.

Доказательство. Докажем последнее утверждение. Если $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2n(n-1)}$, где $n = \dim(G/H)$, то дополнение $\mathtt{W} \setminus X_\varepsilon$ покрывается множествами Y и Z, определенными в [Bo, следствие 5.49] формулами (5.50) и (5.51), поскольку $Y \supset Y_\varepsilon$, а Z входит в (6.2). В этом случае X_ε из (6.1) — подходящее расширение пространства неторальных направлений [10]. $\square$

Перейдем к верхним полурешеткам $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$. По определению, каждая из этих полурешеток $\mathcal{K}$ вместе с любыми подалгебрами $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{l}$ содержит и наименьшую содержащую их подалгебру $\mathfrak{f} = \sup(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$.

Неторальная подалгебра $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i} \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, называется **минимальным элементом** фильтра $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, если $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ не содержит никакой меньшей подалгебры, т.е. из $\mathfrak{j} \in \mathcal{I}$, $\mathfrak{j} < \mathfrak{i}$ следует $\mathfrak{j} \in \mathcal{J} = \{\mathfrak{j} \in \mathcal{I} : [\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \leqslant \mathfrak{h}\}$.

Обозначим через $\mathcal{K}^{\min}$ наименьшую верхнюю полурешетку [11] в $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, содержащую $\mathfrak{g}$ и все минимальные элементы из $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$. Тогда справедливо

---

[10] Напомним, что в [Bo] построена другая модель $W^\Sigma \subset \Sigma$ топологического пространства $\mathtt{W} \subset \mathtt{S}$ (см. § 3). При переходе к Σ радиус ε из предложения 6.3 заменяется на $\varepsilon^\dagger \leqslant \varepsilon|\overline{\chi}^{\mathfrak{f}(1)} - \overline{\chi}^{\mathfrak{h}}|^{-1} \leqslant \varepsilon\sqrt{n(n-1)}$. Согласно [Bo], подходит радиус $\varepsilon^\dagger \leqslant \varepsilon_{G/H} = \frac{1}{2}|c_{G/H}|$, где $c_{G/H} = \max\limits_{v \in \Sigma} \min\limits_{X \in \mathfrak{g},\, |X|=1} Q(vX, X) = -\min\limits_{v \in \Sigma} \max\limits_{X \in \mathfrak{g},\, |X|=1} Q(vX, X) \leqslant \frac{-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ (ср. [Bo, §4.2, §5.4, §5.7]). Тогда $\varepsilon^\dagger \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n(n-1)}} \leqslant \varepsilon_{G/H}$, если $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2n(n-1)}$.

[11] Каждый минимальный элемент $\mathfrak{l} \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ содержится в верхней полурешетке

$$\mathcal{L} := \{\mathfrak{l} \in \mathcal{I} : [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{h} = \mathfrak{l}\}.$$

Отметим, что (если мы исходим из компактного риманова однородного пространства G/H), каждая подалгебра $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}$ соответствует компактной подгруппе группы G.

равенство
$$\mathtt{B}[\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}] = \mathtt{B}[\mathcal{K}^{\min}] := \bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}^{\min}} \mathtt{B}[\mathfrak{k}]. \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь конечную верхнюю полурешетку $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$. Мы ранее обозначили через $/\mathcal{K}^{\#}/$ и назвали **допустимым** полиэдр, соответствующий $\mathcal{K}^{\#} = \{\mathfrak{k} \in \mathcal{K} : \mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}\}$.

Из теорем 5.1 и 5.2 и равенства (6.3) вытекает:

Следствие 6.5. *Пусть $\mathcal{K}$ – конечная верхняя полурешетка, заключенная (не обязательно строго) между $\mathcal{K}^{\min}$ и полурешеткой $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ всех $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантных неторальных подалгебр. Тогда полиэдр $/\mathcal{K}^{\#}/$ является строгим деформационным ретрактом пространства X_{ε}.*

Симплициальный комплекс $\Delta^{\min} := \Delta((\mathcal{K}^{\min})^{\#})$, связанный с G/H, и его геометрическая реализация $/(\mathcal{K}^{\min})^{\#}/$ рассматривались в [Bo]. Отметим, что его вершинам соответствуют алгебраические подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$ (см. сноску). При этом, как показано в [Bo, §7], конечность $\mathcal{K}^{\min}$ следует из простого дополнительного условия на группу $\mathcal{A}$: $\mathrm{Ad}(T) \subset \mathcal{A} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где T – максимальный тор группы $\mathrm{Norm}_G(\mathfrak{h})$.

6.3. **Ретракция на $/\mathcal{K}^{\#}/$. Случай компактной полурешетки $\mathcal{K}$.** Пусть, как в предложении 5.5, $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ — компактная полуалгебраическая, но теперь уже не обязательно конечная, верхняя полурешетка $(\mathcal{A}, \mathfrak{h})$-инвариантных подалгебр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{g}$, причем $\mathcal{K} \ni \mathfrak{g}$, и пусть $\mathcal{K}^{\#} := \mathcal{K} \setminus (\mathfrak{g})$. Обозначим снова через $/\mathcal{K}^{\#}/$ объединение всех симплексов вида
$$/\varphi/ := \mathrm{Convex\,hull}\,\{\overline{\chi}^{\mathfrak{f}_i} : i = 1, \dots, r\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$
где $\varphi = (\mathfrak{f}_1 > \ldots > \mathfrak{f}_r)$ — флаг подалгебр из $\mathcal{K}^{\#}$ длины $r \geqslant 1$. Тогда $/\mathcal{K}^{\#}/ \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ будет компактным полуалгебраическим подмножеством в силу предложения 5.5.

Теорема 6.6. *Компакт $/\mathcal{K}^{\#}/ = \bigcup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{K}^{\#})} /\varphi/$ является строгим деформационным ретрактом следующих компактов:*

— $\mathtt{B}[\mathcal{K}] := \bigcup_{\mathfrak{k} \in \mathcal{K}^{\#}} \mathtt{B}[\mathfrak{k}]$, *в общем случае;*

— X_{ε} *и* $X_1 = \mathtt{B}[\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}]$, *при* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\leqslant \mathfrak{h}$ *и* $\mathcal{K}^{\min} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$.

Здесь $X_{\varepsilon} = \{A \in \mathtt{B}[\mathbb{I}] : \kappa(A) \geqslant \varepsilon^L\}$, для каждого $\varepsilon \in]0,1[$, а $X_1 \subset X_{\varepsilon}$ есть по определению пространство неторальных направлений.

Теорема формулирована сразу для тонкой и грубой версий, т.е. соответственно для $\mathtt{B} = \mathtt{X}$ и $\mathtt{D}$, и справедлива в полуалгебраической категории.

Доказательство. Предложение 5.5 утверждает существование последовательности $X^{(0)} \to \ldots \to X^{(m)}$ п.а. строгих деформационных ретракций компактных пространств, где $X^{(m)} = /\mathcal{K}^{\#}/$, а $X^{(0)} = \mathtt{B}[\mathcal{K}]$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Пусть теперь полурешетка $\mathcal{K}$ заключена (возможно, не строго) между полурешетками неторальных подалгебр $\mathcal{K}^{\min}$ и $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$. Тогда $\mathtt{B}[\mathcal{K}^{\min}] = \mathtt{B}[\mathcal{K}] = \mathtt{B}[\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}]$. Но это п.а. строгий деформационный ретракт пространства $X_{\mathcal{E}}$ (следствие 6.4), и второе утверждение следует из первого. $\square$

§ 7. Добавление. О семействе торальных подалгебр

В этом добавлении доказано, что торальные подалгебры образуют компактное открытое подмножество множества $\mathcal{I}$ всех $\mathcal{A}$-инвариантных подалгебр $\mathfrak{l}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, собственным образом содержащих $\mathcal{A}$-инвариантную подалгебру $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k} < \mathfrak{l} \leqslant \mathfrak{g}$.

Утверждение. *Пусть* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{k}$*, и пусть* $\mathcal{J} = \{\mathfrak{j} \in \mathcal{I} : [\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{k}\}$*, т.е.* $\mathcal{J}$ *— подмножество т.н. торальных подалгебр относительно* $\mathfrak{k}$*. Тогда* $\mathcal{J}$ *и* $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ *компактны. Сверх того, функция* $\mathfrak{l} \in \mathcal{I} \mapsto \dim([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$ *непрерывна.*

Доказательство. Каждой подалгебре $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ сопоставим рациональное число $c_1(\mathfrak{l}) \in \mathbb{Q}$. Для этого фиксируем вложение $\rho : G \subset SO(N)$ (где G компактна) и положим $F(X, X) = \operatorname{trace}(d\rho(X)^2)$, $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\{Z_i\}$ – любой F-ортонормированный базис в $\mathfrak{l}$, и $C = -\sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{l})} (\operatorname{ad}_{\mathfrak{l}} Z_i)^2$ Тогда последовательность чисел $c_1(\mathfrak{l}) = \operatorname{trace}(C), \ldots, c_r(\mathfrak{l}) = \operatorname{trace}(C| \wedge^r \mathfrak{l}), \ldots$ зависит только от $\mathfrak{l}$. Имеем $c_r(\mathfrak{l}) = c_r(\mathfrak{l}')$, где $\mathfrak{l}' = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ – коммутант алгебры $\mathfrak{l}$, т.е. ее наибольшая полупростая подалгебра. Значит, $c_r(\mathfrak{l}) \in \mathbb{Q}$. Кроме того, $\dim(\mathfrak{l}') = \max\{r : c_r(\mathfrak{l}) > 0\}$. Пусть A – компонента линейной связности компактного алгебраического множества p-мерных подалгебр $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l} > \mathfrak{k}$. Тогда $c_r : A \to \mathbb{Q}$ является непрерывной и, следовательно, постоянной функцией, $r = 1, 2, \ldots$. Дополняя базис подалгебры $\mathfrak{k}'$ до базиса подалгебры $\mathfrak{l} \in A$, получаем $c_r(\mathfrak{l}) > c_r(\mathfrak{k}')$ при $\mathfrak{l}' > \mathfrak{k}'$ и $c_r(\mathfrak{l}) = c_r(\mathfrak{k}')$ при $\mathfrak{l}' = \mathfrak{k}'$. Уже при $r = 1$ отсюда следует первое утверждение. $\square$

Утверждение было использовано в §§6.2 и 6.3. Компактность $\mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ и $\mathcal{J}$ используется также в [Bo, доказательство леммы 5.42].

Список литературы

[BWZ] C.Boehm-M.Wang-W.Ziller, A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds, GAFA 14 (2004), 681-733.

[Bo] Christoph Böhm. Homogeneous Einstein metrics and simplicial complexes. J. Differential geometry 67 (2004) 79-165.

[Bo-Ke] C. Böhm and M.M. Kerr, Low-dimensional homogeneous Einstein manifolds, Trans. Am. Math. Soc. 358, 1455 (2005).

[GLP] G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope. Einstein Metrics on Group Manifolds and Cosets. arXiv:0903.2493

[Jen2] Gary Jensen, The Scalar Curvature of Left-Invariant Riemannian Metrics, Indiana Univ. Math. J. 20 No. 12 (1971), 1125-1144.

[AB] А.Л.Бессе. Многообразия Эйнштейна. В 2-х томах. М:Мир.1990. Т.1–318с. Т.2–384с.

[WZ-85] Wang, McKenzie Y.; Ziller, Wolfgang, On normal homogeneous Einstein manifolds. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Ser. 4, 18 no. 4 (1985), p. 563-633.

[WZ2] M. Wang and W. Ziller, Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics, Invent. Math. 84 (1986), 177-194.

[a] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy: Real Algebraic Geometry. Springer 1998

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, 117218, Нахимовский проспект, 36, кор. 1

E-mail address: mmgraev@niisi.msk.ru